Raffaello Cortina Editore

Jean-Pierre Luminet

La segreta geometria del cosmo

Scienza e Idee

Collana diretta da Giulio Giorello

Jean-Pierre Luminet

La segreta geometria del cosmo

Edizione italiana a cura di
Corrado Sinigaglia

Un giorno l'Onnipotente chiama uno scienziato e gli dice: "Ti farò entrare in una stanza che si chiama Spazio. Trovane la forma". Matematici, fisici, astronomi la stanno ancora cercando. L'Universo è finito o infinito? È destinato a durare in eterno o anch'esso un giorno morirà? E di quale materia è composto? Combinando rigore scientifico e gusto letterario, Jean-Pierre Luminet ci guida nei territori dell'immensamente grande e immensamente piccolo, ma anche nella storia delle idee, della filosofia e dell'arte. Ci troviamo così immersi nelle pieghe di un Universo popolato di "galassie immaginarie", veri e propri "miraggi". Dio ha sentito il suo scienziato lamentarsi di non poter far nulla senza luce e gli ha acceso qualche candela celeste, senza però avvisarlo che la sontuosa dimora cosmica "è tappezzata di specchi".

Jean-Pierre Luminet, astrofisico, lavora all'Osservatorio di Meudon ed è direttore di ricerca al CNRS. Per i risultati conseguiti nella sua attività scientifica è stato insignito di numerosi premi di grande prestigio. Tra le sue opere ricordiamo *Figures du ciel* (con Marc Lachièze-Rey, Paris 1998) e *L'Invention du Big Bang* (Paris 2004). In italiano ha pubblicato *I buchi neri* (Firenze 1992).

SCIENZA
E IDEE

Collana diretta
da Giulio Giorello

ISBN 88-7078-884-9
9 788870 788846

€ 32,00

Scienza e idee

Collana diretta da Giulio Giorello

Jean-Pierre Luminet

La segreta geometria del cosmo

Edizione italiana a cura di
Corrado Sinigaglia

INDICE

PREMESSA ALL'EDIZIONE ITALIANA

Questo volume mira alla presentazione di una disciplina, la "topologia cosmica", che cerca di scoprire grandezza e forma dell'Universo, affrontando così una delle maggiori sfide della cosmologia, da venticinque secoli a oggi.

Insieme con un manipolo di collaboratori ho difeso con tenacia tale approccio, per oltre una decina d'anni, contro lo scetticismo – che allora pareva "ragionevole" – di molti dei miei colleghi cosmologi. Una delle possibili e più sorprendenti conclusioni dei nostri modelli di "universo *chiffonné*" (o "spiegazzato", come diremo in italiano) è che lo spazio sarebbe più piccolo di quello colto dall'osservazione telescopica degli oggetti celesti; ciò significa che le sorgenti luminose lontane potrebbero essere in più di un caso fantasmi che rilucono ai confini di uno spazio dalle forme bizzarre, racchiuso su se stesso...

Quando è uscita la prima versione (2001) del libro, le tecniche atte a trattare la topologia cosmica erano già in gran parte disponibili. Ho cercato di darne spiegazione e motivazione comprensibili a tutti: le ritrovate anche nella presente edizione italiana. Di contro, non ho taciuto al lettore che ancora mancano evidenze sperimentali. Ho menzionato le differenti metodologie e strumentazioni suscettibili in futuro di operare una discriminazione tra ciò che è empiricamente corretto e ciò che non lo è, e di risolvere le innumerevoli questioni teoriche circa la natura dello spazio. In particolare, nel capitolo 38 ho spiegato come, grazie al satellite WMAP della NASA, la precisa mappatu-

ra della radiazione fossile – che ci fa vedere i grumi di luce formati per la prima volta nella storia dell'universo – consentirebbe di codificare le vibrazioni originarie dello spazio e di ricavarne, forse, la forma del "tamburo cosmico". Nel capitolo 23 ho espresso la preferenza estetica, del tutto personale, per un modello ben definito, quello dello "spazio sferico dodecaedrico"...

È dunque in uno stato di aspettativa mista a eccitazione che a suo tempo ho consegnato il manoscritto di *L'Univers chiffonné* all'editore francese. Non sospettavo che i miei desideri si sarebbero concretizzati in maniera così veloce e spettacolare. Lanciato il 30 giugno 2001, il satellite MAP (ribattezzato nel frattempo WMAP, acronimo di *Wilkinson Anisotropy Microwave Probe*) ha fornito nuovi e migliori dati rispetto a quelli raccolti dalle missioni precedenti. Dai primi risultati sperimentali, pubblicati nel febbraio 2003, è apparso subito chiaro come certe "anomalie" nei dati consentissero di controllare le nostre ipotesi sulla forma dell'universo – sicché il nostro sogno sembrava poter diventare realtà... L'articolo scritto insieme con i miei collaboratori ha avuto l'onore della copertina di *Nature* (9 ottobre 2003) quale esempio di lavoro scientifico: nuove osservazioni, loro spiegazione tramite un modello teorico specifico – nella fattispecie, il modello di universo sferico dodecaedrico, che i giornalisti in cerca di immagini a effetto hanno immediatamente reso con il nome di "universo a pallone da calcio" – e predizioni precise, falsificabili o confermabili da parte di osservazioni più fini.

Oltre alle correzioni e ai miglioramenti di alcuni dettagli, suggeriti da lettori particolarmente attenti dell'edizione francese, mi è parso indispensabile aggiornare la versione italiana, aggiungendovi in particolare una Postfazione. In essa traccio – brevemente, viste anche le esigenze editoriali! – il bilancio dei risultati raggiunti dal 2001 nell'ambito della topologia cosmica – argomento allora affrontato da pochi, ma ormai in primo piano sulla scena cosmologica.

Le notizie fresche che ci arrivano pressoché ogni giorno dai recessi del cosmo richiederanno in un prossimo futuro ulteriori aggiunte... Non ho dubbi che, nei mesi a venire, i progressi

folgoranti dell'astronomia osservativa ci regaleranno altre sorprese celesti, e che nuove scoperte affineranno le nostre teorie, invalidandone alcune. Comunque sia, esse continueranno a spingerci a individuare la posizione che noi esseri umani, piccoli granelli di polvere, occupiamo in un cosmo immenso, le cui sottili forme cerchiamo orgogliosamente di svelare.

Mi preme, infine, sottolineare come sia particolarmente orgoglioso di vedere il mio testo tradotto nella meravigliosa lingua di Dante e di Leopardi. Entrambi questi grandissimi poeti, sia pure in modo diverso, illustrano l'inclinazione estetica, inevitabilmente mescolata a pregiudizi filosofici e culturali, con cui ogni uomo affronta la questione della finitezza e infinitezza del mondo. Nella *Divina commedia* Dante canta l'universo chiuso teorizzato prima da molti degli antichi Greci e poi dalla dottrina medievale cristiana: "[...] e questo cielo non ha altro dove / che la mente divina, in che s'accende / l'amor che 'l volge e la virtù ch'ei piove. / Luce e amor d'un cerchio lui comprende, / sì come questo li altri; e quel precinto / colui che 'l cinge solamente intende" (*Paradiso*, XXVII, 109-114). Di contro, nell'*Infinito* Leopardi, erede della rivoluzione scientifica newtoniana, si erge a paladino dell'universo infinito, che esprimerebbe a suo dire la tendenza naturale dell'uomo dedito alla meditazione: "Così tra questa / immensità s'annega il pensier mio: / e il naufragar m'è dolce in questo mare".

Sul piano più propriamente scientifico, i nostri due Paesi sono associati nella missione VIRGO che ha il compito di rilevare quelle piccolissime vibrazioni del tessuto elastico dello spazio-tempo che sono le onde gravitazionali. Da secoli pittura, scultura, architettura, musica – queste piccolissime vibrazioni della sensibilità umana – hanno trovato nei nostri due Paesi la loro più alta espressione. Sono convinto che Arte e Scienza condividano la ricerca della bellezza, se non della verità, del mondo che ci è dato da comprendere.

Meudon, 3 giugno 2004 *Jean-Pierre Luminet*

Lo spazio nello scherno di questo grido erompe:
io non so!

STÉPHANE MALLARMÉ

Ringraziamenti

Christine Ehm ha lavorato al mio manoscritto con attenzione rara; Jean-Philippe Uzan, Roland Lehoucq e Didier Pelat mi hanno sollecitato con le loro critiche.

La Fondation des Treilles mi ha ospitato più volte e mi ha permesso di condurre in porto un'impresa di tale portata, assicurandomi luoghi di lavoro sereno che mi era impossibile trovare altrove. Il mio lungo sforzo è stato ugualmente sostenuto in ogni momento da Olivier Bétourné, che si è armato di pazienza e di comprensione nonostante i miei numerosi aggiornamenti. Esprimo a tutte e a tutti la mia profonda gratitudine.

GUIDA ALLA LETTURA

La scienza ha pronunciato le prime parole nell'antica Grecia. A quell'epoca i filosofi della natura – Eraclito, Democrito, Platone – erano tanto maestri del linguaggio quanto uomini di scienza. Ragionamento fisico ed espressione poetica andavano di pari passo nei loro trattati sulla natura. Una delle punte più alte si avrà con Lucrezio. Poeta latino del I secolo a.C., discepolo di Epicuro e della filosofia atomistica, ci lascerà un'opera esemplare, *De rerum natura*, in cui disegno epistemologico e cura formale sono mirabilmente coniugati. Inoltre, Lucrezio saprà piegare il testo in modo da renderlo il più adeguato possibile al contenuto.[1]

Nel corso della storia tale modo di raccontare la scienza ha conosciuto successi, ma anche dure critiche. Vi è stato chi, in nome di un qualche "purismo", ha sostenuto che nessuna espressione letteraria fosse capace di rendere conto della sottigliezza e della complessità del pensiero scientifico. Da parte mia, ho sempre ritenuto che non vi fosse contraddizione alcuna tra il compito dello scienziato e l'arte dello scrittore. So bene quali siano i limiti del linguaggio, dell'analogia e della metafora. Per esempio, per quanto concerne i loro vocaboli, le scienze fisiche e matematiche hanno preso a prestito dal linguaggio corrente un gran numero di termini cui hanno confe-

1. Sia nell'organizzazione generale sia nella sintassi e nell'alfabeto, il poema fa uso di un ciclo di creazione e di distruzione che mima uno degli aspetti essenziali della filosofia atomistica; vedi, per esempio, P. Braffort, *Science et littérature*, Diderot Éditeur, Paris 1999.

rito un senso preciso, sovente lontano dall'accezione comune: spazio, campo, onda, caos, ecc. E tali slittamenti di significato non hanno mancato di generare confusioni, se non addirittura controsensi, tra il largo pubblico o sotto la penna di intellettuali privi di formazione scientifica adeguata.[2]

Ciononostante, sono sempre rimasto affascinato dall'idea che la forma di un volume possa riflettere, in un modo o nell'altro, il suo contenuto – per figura, modello, organizzazione, costruzione letteraria, ritmo.

Il primo libro di "divulgazione" che ho scritto,[3] dedicato ai buchi neri, aveva la struttura di un romanzo poliziesco. Due erano i protagonisti, la gravitazione e la luce. Quest'ultima era la vittima, e il suo assassinio dava luogo a una sorta di indagine su un delitto ben poco comune. L'inchiesta cominciava con un'autopsia, descritta nella sezione intitolata "Cadavere eccellente", e proseguiva fino alla soluzione dell'enigma, nella sezione finale battezzata "La luce ritrovata". Purtroppo, devo ammettere che tutto ciò è passato inosservato, salvo che in rari casi. Sono perciò tentato di abbozzare in via preliminare la costruzione peculiare di *questo volume*, delineando una guida alla lettura.

Il *libro* tratta della topologia dell'Universo, argomento dalle molteplici ramificazioni che obbligano a compiere incursioni nella matematica, nella fisica, e in particolare nell'astrofisica, ma anche nella storia delle idee, nei concetti della filosofia, per non dire dei riferimenti al mondo dell'arte. Posto di fronte a un blocco unico e lineare, il lettore potrebbe avere qualche difficoltà a seguire il filo conduttore. Così ho optato per una costruzione arborescente, dotando il testo di una struttura a "grafo". In matematica, un grafo è un insieme visivo di elementi messi in corrispondenza reciproca mediante archi, frecce e cappi. Come avremo modo di vedere nel caso dell'indovi-

2. Vedi A. Sokal, J. Bricmont, *Imposture intellettuali*, tr. it. Garzanti, Milano 1999.

3. J.-P. Luminet, *I buchi neri*, tr. it. Nardi, Firenze 1992.

nello dei ponti di Königsberg, la teoria matematica dei grafi è figlia della topologia: essa permette di risolvere problemi complicati a partire da rappresentazioni grafiche semplici.

La prima parte di *questo volume* costituisce il tronco principale del grafo. Riprende per lo più argomenti che ho affrontato in varie conferenze di carattere divulgativo. La successione logica di idee e concetti ci porterà passo dopo passo dall'ingenua interrogazione iniziale sulla forma dello spazio alle più sofisticate considerazioni circa la topologia del cosmo, ai modelli di spazio *chiffonné* (o spiegazzato) e ai loro approcci sperimentali.

I capitoli della seconda parte ("Le pieghe dell'Universo") possono essere considerati i rami del grafo che apportano chiarimenti e approfondimenti specifici ai diversi punti del percorso principale. Dal momento che un grafo può contenere nodi e incroci, ed è percorribile in più sensi, l'esplorazione di queste ramificazioni può essere tentata più volte nel corso della lettura. La cosa più semplice è intraprenderla quando un punto d'uscita possibile è indicato nella parte principale; libero il lettore di ritornare poi al tronco, o di bighellonare tra un ramo e l'altro, nell'arborescenza dell'argomento. Ma libero anche di non esplorare alcun ramo prima d'essersi inerpicato sino alla cima del tronco principale!

A Siracusa, nella Sicilia del III secolo a.C., il re Gerone esortò Archimede ad applicare la sua arte delle cose puramente intellettuali agli oggetti sensibili, a rendere i suoi ragionamenti accessibili ai sensi, anzi tangibili per gli uomini comuni. Sarei felice se *questo volume*, dedicato a un argomento mai trattato a tale livello di divulgazione, riuscisse in una simile impresa.

PARTE PRIMA

LA FORMA DELLO SPAZIO

1

IL MOLLUSCO UNIVERSALE

> E tu, dolce Spazio,
> Dove sono le steppe dei tuoi seni, in cui perdermi?
>
> JULES LAFORGUE

Qual è la forma dello spazio? È la domanda che più mi intriga da trent'anni a questa parte. Per essere preciso, da un pomeriggio d'estate che ho ancora scolpito nella memoria. Adolescente, leggevo nel mio giardino inondato di sole un'enciclopedia d'astronomia rivolta al grande pubblico. Alla fine del testo, però, pagine più tecniche introducevano le nozioni di relatività generale e di spazio curvo. Non ne capivo nulla, ma ne ero affascinato. Un certo Albert Einstein aveva dimostrato che spazio e tempo erano meno semplici di quanto suggerisca la nostra intuizione geometrica... Una frase, in particolare, aveva attirato la mia attenzione: si diceva che, in un campo gravitazionale, il continuo dello spazio-tempo non era più euclideo, bensì costituiva un "mollusco di riferimento". Nella mia mente si era subito formata un'immagine assai viva. Al sapore delle parole si era aggiunto il valore metaforico: il mollusco dello spazio-tempo doveva far nascere nel mio immaginario la visione pittoresca di un'immensa lumaca cosmica, la cui pelle era striata di luce e variava per curvatura e aspetto. Da allora non ho mai smesso di cercare di rendere più esplicita questa bizzarra affermazione – qual è mai questo mollusco universale? – e non ho più contemplato con gli stessi occhi il bel cielo stellato della

mia Provenza. A incuriosirmi non erano più le miriadi di stelle che attraversano come collane di diamanti la Via Lattea, bensì ciò che vi stava intorno, ossia lo *spazio*. Non era più il contenuto ma il contenente a sollevare un interrogativo via l'altro: l'impalpabile spazio che contiene le stelle ha una "tessitura"? È piatto, ammaccato, curvo, piegato, liscio, rugoso, granuloso? È finito o infinito? Ha margini, buchi, manici? Infine, che cosa significa, esattamente, dire che lo spazio ha una forma?

È da quel momento che ho deciso di occuparmi dell'Universo non per come è, ma per come *potrebbe essere*, restando nei limiti della ragione fisica (in caso contrario, ogni fantasia sarebbe lecita, e non si tratterebbe più di lavoro scientifico). Mi ci sono voluti molti anni per instillare un contenuto razionale in quel mollusco a consonanza poetica. Per il senso comune è normale pensare lo spazio come una sorta di ricettacolo vuoto, privo di forma, che accoglie i corpi materiali. Di contro, alcuni filosofi hanno cercato di dare consistenza a tale ricettacolo, considerandolo come un materiale, una sostanza eterea che insieme conterrebbe e impregnerebbe i corpi. Per uno scienziato gli interrogativi sullo spazio sono pertinenti in quanto la matematica dà loro senso. Ora, è soltanto ai giorni nostri che la matematica dispone degli strumenti appropriati per porre "buone" domande sullo spazio e, all'occorrenza, per aiutarci a trovare delle risposte. Benché non ci insegni che lo spazio "esiste" necessariamente come realtà oggettiva (tale questione continua a essere di competenza della filosofia), nondimeno gli conferisce un'esistenza come struttura definita da simmetrie [▶ **p. 337, La simmetria**] e forme.

Lo studio delle forme è una scienza autonoma che si ricollega alla geometria. Gli esperti hanno l'abitudine di cimentarsi con spazi che sfidano il senso comune. Spazi che possiedono undici o ottanta dimensioni, spazi indefinitamente lisci o, al contrario, discontinui; spazi crivellati di buchi, che hanno bordi o che terminano brutalmente con punti angolosi. Ma tali spazi non sembrano avere alcun rapporto con lo spazio fisico. Del resto, a ben vedere, anche gli oggetti geometrici più elementari, entrati nel linguaggio corrente, sono delle astrazio-

ni: il punto in quanto elemento senza dimensione, la retta in quanto insieme di punti, il piano in quanto formato da rette e il volume in quanto aggregato di piani: nulla di tutto ciò esiste nell'Universo "reale". Allora, che cosa possono dire il fisico, il matematico, l'astronomo di questo Universo reale che contiene oggetti materiali, gli esseri viventi, le stelle, le galassie, le onde, le radiazioni? Ha avuto inizio? È eterno o effimero? Lo spazio, appunto, è finito o infinito?

Quando ho cominciato a interrogarmi sulla natura, la grandezza e l'origine dell'Universo, ignoravo ancora che tali questioni rientrassero tra quelle che l'uomo si pone da tempo immemorabile. In quasi tutte le culture filosofi, uomini di scienza o artisti hanno offerto le più diverse spiegazioni, ed esse sono evolute nel corso della storia. Se la cosmologia odierna e le teorie del Big Bang che ne sono seguite conoscono ora un successo di pubblico così grande è perché cercano di rispondere a quelle domande, combinando ragionamento matematico, modellizzazione fisica e osservazione astronomica. [▶ **p. 231, Questioni cosmiche**]

Dopo un secolo di notevoli progressi, i cosmologi sono sul punto di chiarire alcuni di quegli enigmi. In particolare, cercherò di mostrare come, con un po' di geometria e dei telescopi perfezionati, speriamo di riuscire a misurare, nei prossimi anni, grandezza e forma dell'Universo.

Fin qui ho utilizzato la parola "Universo" in luogo della parola "spazio". Si tratta di un'assimilazione abbastanza abituale per il vocabolario comune. Tuttavia, essa non è lecita. Occorre distinguere con precisione tra spazio matematico, spazio fisico, spazio-tempo e Universo.

Spazio e Universo

• Uno spazio è un insieme di oggetti sul quale è definita una struttura (per esempio, un insieme di punti tra i quali è definita una distanza). Gli spazi matematici sono tanti quante sono le strutture possibili, vale a dire un'infinità, e l'immaginazione umana non potrebbe mai esaurirli tutti. Fino al XIX secolo l'unico spazio matematico conosciuto era lo

spazio euclideo, la cui struttura geometrica discende appunto dai postulati di Euclide e di cui tutti noi abbiamo appreso le regole elementari sui banchi di scuola.

• Lo spazio fisico, invece, è unico. Se si crede alla definizione del dizionario, esso è "l'estensione indefinita che contiene i corpi materiali". Nell'accezione comune, è lo spazio della conquista, quello in cui vaga la navicella *Enterprise* della serie *Star Trek*. Ma l'affermazione che questo spazio possieda un certo numero di dimensioni, nel nostro caso tre, che sia finito o infinito, che sia piatto o curvo, ecc. non ha alcuna evidenza. La ragione è che il nostro spazio percettivo è *a priori* distinto dallo spazio fisico.[1] Il fisico cerca giustamente di descrivere questa estensione indefinita che è lo spazio ricorrendo a un modello geometrico. Come vedremo, *più* modelli sono possibili: la descrizione ottenuta dipende, in particolare, dal grado di finezza con cui lo spazio fisico è analizzato.

• Lo spazio-tempo è un'entità teorica che unifica uno spazio geometrico a tre dimensioni e il continuo temporale a una dimensione. È dunque uno spazio a quattro dimensioni, munito di un certo numero di strutture possibili (generalmente non euclidee), che serve da cornice per il lavoro delle teorie della relatività. [▶ **p. 215, Le geometrie non euclidee**]

• L'Universo, per definizione, è l'insieme di tutto ciò che esiste. In relatività generale è modellizzato da un'associazione complessa che raggruppa contenuto e contenente, ossia lo spazio, il tempo, ma anche l'energia in tutte le sue forme (materia, luce, energia del vuoto). L'Universo relativistico è lo spazio tessuto dal tempo e gravato dalla materia. Pertanto, le asserzioni cosmologiche che assimilano l'Universo alla sola componente spaziale – per esempio, quando si afferma che "l'Universo è piatto" – possono indurre in errore il lettore. [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**]

• Resta la nozione di Universo osservabile, che sarei tentato di chiamare "universo" senza la maiuscola. Diversamente dall'Universo, dallo spazio-tempo-materia nella sua interezza, che non ha davvero né centro né frontiere, né interno né esterno, l'universo osservabile è centra-

1. I canali semicircolari del nostro orecchio interno, che rivelano le accelerazioni angolari della testa nei tre piani perpendicolari, costruiscono uno spazio mentale di struttura localmente euclidea; vedi, per esempio, A. Berthoz, *Le Sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris 1998.

to sull'osservatore terrestre e possiede delle frontiere. Ogni indagine astronomica ci immerge, di fatto, nel passato, giacché l'informazione ci giunge tramite radiazioni (elettromagnetiche, gravitazionali) o particelle (neutrini, raggi cosmici) che viaggiano a una velocità finita. Questa risalita nel tempo incontra necessariamente un limite che corrisponde all'epoca in cui non si era ancora formata alcuna sorgente di radiazione. L'universo osservabile non è, dunque, che una porzione dello spazio-tempo delimitata da un "orizzonte cosmologico": è l'interno di una sfera di cui noi siamo il centro e il cui raggio attuale è di circa cinquanta miliardi di anni luce (distanza percorsa da un fotone a partire dal Big Bang). Nel corso dell'espansione cosmica, il raggio di questo orizzonte sferico aumenta.

Teniamo a mente queste differenti accezioni. Capiterà che nel seguito del *libro* utilizzi ancora la parola "universo" (con la minuscola) invece della parola "spazio"; ma lo farò per pura comodità di discorso, e unicamente là dove non vi sia alcun rischio di fraintendimento.

2

LA GRANDEZZA DELLO SPAZIO

> [Il cosmo] è una parte circoscritta del cielo, che comprende gli astri, la terra e tutti i fenomeni celesti separati dall'infinito e terminante con un confine che può essere di natura rada o fitta, dissolvendosi il quale si dissolve anche tutto ciò che è in esso contenuto; inoltre, o in moto o in quiete, di forma rotonda o triangolare o di qualsiasi tipo.
>
> EPICURO

La storia delle concezioni della forma dello spazio ha venticinque secoli. È piena di sorprese, di svolte, e non mancano ritorni al passato; brulica di intuizioni profonde e di aneddoti pittoreschi. A lungo ci si è arrovellati su una domanda: *lo spazio è finito o infinito?* A seconda delle epoche e delle culture, la risposta ha oscillato, come un'altalena, tra due visioni opposte del mondo, che riguardano tanto la filosofia e l'estetica quanto l'astronomia.

[**Una breve storia dello spazio, p. 189 ◄**] Un episodio dell'Antichità ci chiarisce il tipo di ragionamento utilizzato da quelli che potremmo considerare gli scienziati di allora. Nell'*Arenario* Archimede discute della grandezza dell'Universo in base alle ipotesi degli astronomi greci. A tal fine, si propone di stabilire il numero di granelli di sabbia che riempirebbero il volume del Mondo. Per la maggior parte degli Antichi, il Mondo non si limita alla Terra, ma si estende all'intero Universo, abbracciando il Sole e i pianeti, fino alle stelle fisse, che si ritiene siano si-

tuate alla medesima distanza, simili a chiodi dorati incastonati in una sfera ultima che racchiude lo spazio da ogni parte. Archimede intende dunque calcolare il volume del Mondo contando i granelli di sabbia che si dovrebbero impilare per riempirlo del tutto. Prendendo come diametro quello ammesso dal sistema geocentrico di Eudosso e di Aristotele, Archimede ottiene un numero di granelli pari a (in notazione odierna) a 10 elevato a 51. Aristarco di Samo, contemporaneo di Archimede, aveva però congetturato un mondo ben più esteso di quello dei suoi predecessori. Infatti, aveva ipotizzato un sistema del mondo eliocentrico, nel quale il Sole era immobile al centro dell'Universo, mentre la Terra gli ruotava intorno seguendo un'orbita circolare. Date tali condizioni, era necessario che le stelle fossero molto lontane; altrimenti, per un effetto di prospettiva detto "parallasse", la loro posizione nel "firmamento" sarebbe cambiata nel corso dell'anno. Adottando come diametro del Mondo [▶ p. 259, **Distanze astronomiche**] quello indicato da Aristarco, Archimede ottiene 10^{63} granelli di sabbia. Ritenendo questo numero irragionevolmente grande, ne conclude che Aristarco ha sovrastimato la taglia del cosmo e che, pertanto, le sue ipotesi cosmologiche sono errate.

L'astronomia moderna ci ha insegnato non solo che Aristarco aveva ragione per quanto concerne i movimenti della Terra, ma anche che egli aveva intravvisto l'immensità del cosmo. L'Universo è incredibilmente più esteso di quanto avessero immaginato gli Antichi. Il numero complessivo di atomi contenuti nell'universo osservabile è stimato circa 10^{79}. Si tratta di un valore facile da calcolare: sapendo che l'Universo è essenzialmente composto d'atomi di idrogeno, basta moltiplicare la costante di Avogadro (numero di atomi di idrogeno contenuti in 1 grammo, pari a circa 10^{24}) per la massa del Sole (circa 10^{33} grammi), per il numero medio di stelle in una galassia (circa cento miliardi, ossia 10^{11}) e per il numero di galassie nell'universo (ancora 10^{11}).[1] Inoltre, gli atomi di idrogeno non si

1. La notazione in "potenze di 10" permette di ridurre le moltiplicazioni a semplici addizioni: $10^{24} \times 10^{33} \times 10^{11} \times 10^{11} = 10^{24+33+11+11} = 10^{79}$.

toccano tra loro come i granelli di sabbia di Archimede; in media, ve ne è "soltanto" una decina per metro cubo di spazio. Il volume dell'universo osservabile è dunque 10^{78} metri cubi, e ciò corrisponde al volume di una sfera avente un raggio all'incirca di dieci miliardi di anni luce.

Archimede, come la maggior parte degli astronomi dell'Antichità, credeva che l'Universo fosse finito. Chi parla di Universo finito, pensa spesso a una bolla di materia immersa in un oceano di nulla. Immagina una zona in cui sarebbero presenti la materia, le stelle, e che si estenderebbe fino a una certa frontiera al di là della quale non vi sarebbe che spazio vuoto. Tale immagine è erronea, e per più di una ragione. Anzitutto, non vi è probabilmente spazio fisico senza materia o energia; certo, tutto ciò è impossibile da provare, dal momento che non possiamo togliere dall'Universo tutte le forme d'energia per controllare se lo spazio scomparirebbe con esse; nondimeno, le teorie della relatività generale e della meccanica quantistica, pilastri della fisica contemporanea, ci confortano in questa idea. Inoltre, lo spazio può essere finito senza avere frontiere. Ce lo hanno insegnato le nuove geometrie scoperte nel XIX secolo, con i loro spazi non euclidei dalle proprietà sconcertanti. [◄ **p. 215, Le geometrie non euclidee**]

Potremo meglio comprendere la nozione di uno spazio insieme finito e senza bordi se riprendiamo l'analogia impiegata da Georges Lemaître – il padre della concezione poi detta del Big Bang – in una conferenza intitolata *La grandezza dello spazio*. Semplifichiamo il ragionamento passando da tre a due dimensioni, ovvero riducendo il volume spaziale a una superficie, per esempio quella della Terra. Tale superficie ha un'estensione finita che può essere misurata da un'area, proprio come lo spazio ordinario da un volume. È un mosaico costituito di pezzi disuguali giustapposti, per esempio terre emerse e oceani, e dove ogni pezzo possiede una frontiera precisa. Ma se si confederano uno dopo l'altro tutti i paesi, i continenti e gli oceani, le frontiere arretrano progressivamente, fino a svanire del tutto allorché si realizza l'unione di tutte le parti. La

superficie della Terra è senza frontiere. Perché non dovrebbe valere lo stesso per lo spazio a tre dimensioni? Affinché l'analogia funzioni, dobbiamo dimenticare il fatto che possiamo staccarci dalla superficie terrestre e spostarci nella terza dimensione: non possiamo, infatti, uscire dallo spazio ordinario in una qualche quarta dimensione e guardarlo dall'esterno.

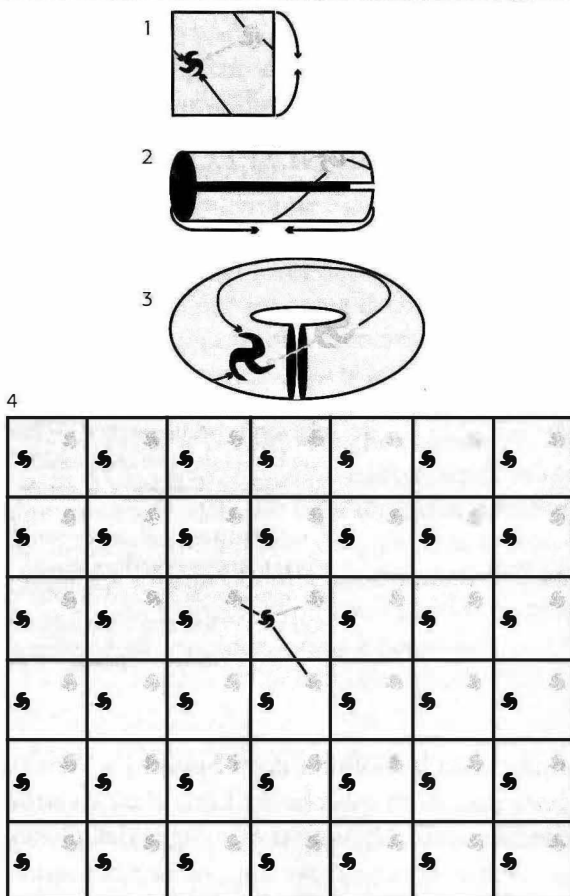
Si è soliti pensare che la fisica acceda soltanto a un'infima parte del reale. Per quanto concerne la cosmologia, quando si considera l'Universo, si potrebbe ritenere che l'universo *osservabile* – quello che è a portata della nostra vista o dei nostri telescopi – non sia che una piccola parte dell'Universo *reale*. Ora, un'idea del genere potrebbe anche essere falsa. Vedremo che i modelli d'Universo *chiffonné* (spiegazzato), muniti delle loro strane topologie, offrono un'alternativa paradossale, in cui lo spazio reale è più piccolo di quello osservato! Oggetti cosmici apparentemente situati a una distanza di dieci miliardi di anni luce potrebbero riempire uno spazio che misura soltanto tre miliardi di anni luce. Come è possibile?

3

GIOCO DI SPECCHI

> Sì alto e sì sottile è ciascun arco
> che sotto ciascun ponte si distende
> che ben si par che quel sublime incarco
> per miracol divino in aria pende.
>
> L'incurvatura, ond'ogni ponte ha varco,
> di tante gemme variata splende,
> ch'ogni arco ai lumi ed ai color che veste,
> somiglia in terra un'iride celeste.
>
> GIAMBATTISTA MARINO

Chiunque visiti la Galleria degli Specchi a Versailles o le più modeste case degli specchi dei Luna Park è catturato dal gioco delle riflessioni. Ognuno si meraviglia dell'illusione ottica prodotta dalle immagini speculari, simili a fantasmi.

Gli specchi non fanno che riflettere le immagini; racchiudono, però, anche alcuni segreti dell'infinito. Ciascuno di noi sa che una stanza le cui pareti siano ricoperte di specchi dà l'illusione d'essere più grande. Collochiamoci tra due specchi paralleli – accade spesso dal parrucchiere. Ci vediamo alternativamente di fronte e di dietro, e così via, quasi all'infinito. *Quasi*, giacché nella pratica l'infinito non si raggiunge: il minimo difetto di parallelismo tra gli specchi trasforma il sistema in un grande caleidoscopio. Un caleidoscopio è un cilindro all'interno del quale si trova un gioco di piccoli specchi disposti secondo determinati angoli, che producono combinazioni

3.1 Gioco di specchi

Un universo molto semplice a due dimensioni, detto *toro* (3), illustra come un osservatore situato nella galassia rossa possa vedere immagini multiple della galassia gialla. Questo modello di universo *chiffonné* è costruito a partire da un quadrato (1) i cui bordi opposti sono stati incollati (2): tutto quello che esce da un lato riappare immediatamente sul lato opposto, nel punto corrispondente. La luce della galassia gialla raggiunge la galassia rossa lungo più tragitti, di modo che l'osservatore nella galassia rossa vede numerose immagini della galassia gialla, ripartite in tutte le direzioni del cielo. Benché lo spazio del toro sia finito, un essere che viva su di esso ha l'illusione di vedere uno spazio, se non infinito (nella pratica vi sono orizzonti che limitano la vista), comunque maggiore di quello che in realtà è. Questo spazio fittizio (4) ha l'aspetto di un reticolo, costruito a partire da una cellula fondamentale, che ripete indefinitamente ciascuno degli oggetti di tale cellula.

multiple di immagini. Dal parrucchiere l'imperfezione del parallelismo distribuisce le immagini speculari lungo un cerchio, finché esse non finiscono per scomparire dallo specchio dopo un certo numero di riflessioni.

Immaginiamo ora una stanza le cui quattro pareti verticali siano tappezzate di specchi, e collochiamoci all'interno, non importa dove: ne risulta un effetto caleidoscopico rispetto all'angolo più vicino; inoltre, le riflessioni ripetute di ciascuna coppia di specchi opposti riproducono senza sosta l'effetto, creando l'illusione di un reticolo infinito che si estende in un piano. Questa pavimentazione di un piano infinito con motivi che si ripetono ha nome, in matematica, di *tassellazione* (*tassello* è un pezzo del mosaico).

Infine, consideriamo una stanza tappezzata di specchi su tutte le sei pareti (soffitto e pavimento inclusi). Se vi entriamo, il gioco delle riflessioni multiple fa sì che abbiamo immediatamente l'impressione di vedere l'infinito in tutte le direzioni, quasi fossimo sospesi in cima a un pozzo senza fondo, pronti a esserne ingoiati, al minimo movimento, in una direzione o nell'altra.[1]

Lo spazio cosmico, apparentemente gigantesco, potrebbe cullarci in un'illusione analoga. Ovviamente, non possiede né pareti né specchi, e le immagini fantasma sarebbero create qui non dalla riflessione della luce sulle pareti dell'Universo, ma dalla moltiplicazione delle traiettorie luminose dovuta alle pieghe di uno spazio *chiffonné*, "spiegazzato" (figura 3.1).

1. L'architetto Serge Salat ha concepito delle installazioni sorprendenti in cui lo spettatore perde i suoi riferimenti spaziali, avendo l'impressione di penetrare in uno spazio cristallino moltiplicato all'infinito da tutte le parti. Vedi S. Salat, F. Labbé, *Le Livre infini*, AFAA, Paris 1994.

4

LE QUATTRO SCALE DELLA GEOMETRIA

> Chiama pure alla riscossa lo spazio,
> vecchio avvoltoio podagroso
> che lascia dietro di sé como striscia di bava
> il bianco nastro delle strade e i grandi archi
> dell'orizzonte, simili a immense lumache arrotondate!
>
> FILIPPO T. MARINETTI

Le forme della natura sono limitate da svariati vincoli. I primi sono quelli imposti dal carattere tridimensionale dello spazio.[1] Questo non è un fondale passivo, bensì ha una struttura che influisce sulla forma di tutto ciò che esiste. La sua architettura detta le regole alle quali ciascuna forma materiale deve la sua obbedienza.

L'architettura reale dello spazio e i vincoli che essa impone ci sono ancora sconosciuti. Se potessero studiare il galleggiamento, la pressione, le leggi del flusso e le altre proprietà costitutive del loro spazio naturale, i pesci avrebbero indubbiamente una percezione diversa del proprio ambiente! La nostra specie ha tale capacità: esaminando l'ampio ventaglio degli spazi astratti proposti dalla matematica, indagandone curvature, trasformazioni, dilatazioni, gli esseri umani riescono a comprendere meglio l'universo. Certo, le persone sono per la maggior parte incapaci di rappresentarsi mentalmente uno spazio non

1. Mi riferisco qui alle tre dimensioni usuali (lunghezza, larghezza e profondità), ben sapendo, però, che teorie recenti invocano dimensioni spaziali supplementari, che sarebbero percepibili solo a brevissima distanza.

euclideo; ma i geometri possono fornire loro descrizioni matematiche coerenti. I pittori del Rinascimento hanno lavorato molto sulla rappresentazione dello spazio al fine di perfezionare la propria tecnica. Di fronte alla difficoltà di proiettare lo spazio a tre dimensioni su una superficie piana, hanno inventato la prospettiva, matematizzando così lo spazio percepito tramite le leggi della geometria che, nel XVII secolo, Gérard Desargues battezzerà con il nome di "proiettiva". Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Paolo Uccello e Albrecht Dürer furono i veri geometri della loro epoca!

Qual è lo spazio matematico suscettibile di rappresentare correttamente lo spazio reale? Il problema è molto più complicato di quanto sembri. I mondi microscopici e macroscopici differiscono profondamente dallo spazio immediato che ci circonda. La questione della rappresentazione geometrica dello spazio si pone a quattro livelli differenti (quattro "scale" come dicono i fisici): microscopico, locale; macroscopico e globale. Che cosa significa di preciso tutto questo? Torniamo all'immagine del "mollusco universale". A livello macroscopico, la superficie del mollusco appare dolcemente incurvata, flessibile e regolare. Se la si osserva con una lente d'ingrandimento, la curvatura diviene impercettibile, di modo che alla scala locale ogni piccolo intorno di un punto della superficie del mollusco può essere assimilato a una porzione del piano. Se ci si serve poi di un microscopio, si scoprono però sulla superficie del mollusco numerose irregolarità e rugosità. Infine, se ci si allontana il necessario, si percepisce la morfologia globale dell'animale. Si tratta di una chiocciola, di una lumaca o di un calamaro? Le osservazioni effettuate alle risoluzioni precedenti non ci dicevano nulla al riguardo.

È un po' la stessa cosa con la struttura dello spazio. Alla scala locale, cioè a distanze comprese tra 10^{-18} metri (un miliardesimo di miliardesimo di metro, lunghezza attualmente accessibile alla sperimentazione) e 10^{11} metri (cento milioni di chilometri, dell'ordine della distanza Terra-Sole), la geometria dello spazio è descritta assai bene da quella del comune spazio euclideo tridimensionale, a curvatura nulla. "Assai bene" si-

gnifica che tale struttura matematica serve da cornice naturale per le teorie fisiche che, come la meccanica classica newtoniana e la relatività ristretta (o speciale), permettono di spiegare correttamente la quasi totalità dei fenomeni della natura. Lo spazio euclideo trae il proprio nome dal geometra greco Euclide che, nel III secolo a.C., aveva raccolto l'insieme delle conoscenze matematiche dell'Antichità nei tredici volumi dei suoi *Elementi*. L'opera di Euclide tratta delle forme delle figure geometriche, delle loro relazioni, delle loro dimensioni e delle loro proporzioni. Per lungo tempo lo spazio euclideo fu l'unico spazio noto ai matematici, tanto che, nel XVIII secolo, Immanuel Kant giunse a sostenere che i postulati della geometria di Euclide erano intrinseci al pensiero umano. Ma egli scrisse cose del genere proprio nel momento in cui l'epoca euclidea era al tramonto! [▶ **p. 169, Una breve storia dello spazio**]

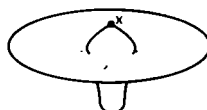
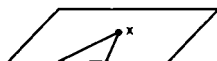
Alla scala macroscopica,[2] compresa *grosso modo* tra 10^{11} e 10^{25} metri, la geometria dello spazio è descritta meglio da una geometria non euclidea, più precisamente da una "varietà riemanniana" (generalizzazione tridimensionale di una superficie a curvatura variabile) continua, più o meno incurvata dalle masse dei corpi che contiene.[3] Nella teoria della relatività generale di Einstein, l'Universo è descritto meglio da una stoffa flessibile ed elastica; lo spazio, accoppiato al tempo, è un'armoniosa anatomia di rotondità, cavità e gibbosità che rendono conto dei fenomeni gravitazionali.

All'estremità infinitesima della scala, su distanze inferiori a 10^{-18} metri, penetriamo nel dominio dello spazio microscopico, ancora inesplorato dalla fisica sperimentale. La sua architettura più intima è inaccessibile ai nostri attuali strumenti d'indagine, siano essi potenti microscopi elettronici o accelera-

2. I termini "microscopico" e "macroscopico" che qui impiego per descrivere la geometria dello spazio non hanno nel linguaggio corrente gli stessi significati. Un batterio è microscopico poiché non si vede a occhio nudo, mentre un fiore è macroscopico. Stando alle mie definizioni, sia il batterio sia il fiore si ricollegano alla scala locale dello spazio.

3. Nell'intorno di corpi eccezionalmente massivi o densi, come i buchi neri, gli effetti della curvatura possono farsi sentire a distanza di qualche metro.

tori di particelle ad altissima energia. Soltanto teorie speculative ne propongono modelli geometrici. Lo spazio microscopico potrebbe rivelare proprietà geometriche particolari. Di che cosa è fatto realmente? Esistono "granuli" di spazio, così come vi sono, in fisica quantistica, granuli d'energia? All'inizio del XX secolo il chimico Dimitrij Mendeleev, passato alla storia soprattutto per aver concepito la tavola periodica degli elementi, sostenne l'idea che lo spazio fosse costituito da particelle un milione di volte più piccole dell'atomo di idrogeno, e che gli atomi non fossero che combinazioni di tali particelle. Fisici teorici creativi come Paul Dirac e John Wheeler hanno sviluppato proprio questa idea, assimilando lo spazio a un insieme di granuli o di bolle di sapone. In tale concezione, lo spazio non ha più la passività di un semplice sistema di coordinate. È un principio attivo che dà origine al mondo materiale, una sostanza magica la cui curvatura, la cui granularità e le cui eccitazioni definiscono la massa delle particelle, la loro carica elettrica e tutti i campi d'interazione ai quali esse sono soggette. Per esempio, lo spazio potrebbe essere mosso da fluttuazioni che ne modificano di continuo la forma, rendendola estremamente complessa: instabile, discontinua, caotica. Lo spazio potrebbe persino rivelare dimensioni nascoste supplementari.

Tali argomenti altamente speculativi sono in pieno sviluppo e costituiscono una delle grandi sfide della fisica di domani. Non li affronterò in *questo volume*, giacché qui siamo interessati soprattutto alla prospettiva più ampia possibile sotto cui può essere vista la stoffa universale. E anche in questo caso le sorprese non mancano. Non sappiamo ancora se, alla scala cosmologica, lo spazio sia infinito, di curvatura nulla o negativa, o se sia finito con una curvatura positiva, simile a una sfera multidimensionale. L'ipotesi più intrigante è quella per cui lo spazio potrebbe essere *chiffonné*, spiegazzato, per esempio ripiegato più volte su se stesso, risultando così euclideo o a curvatura negativa, e malgrado ciò finito. Per trattare questi aspetti globali dello spazio è necessaria una disciplina nuova, che mescoli matematica avanzata e osservazioni cosmologiche sottili: la topologia cosmica. A essa è dedicato *questo volume*.

4.1 I quattro livelli della geometria

I livelli della geometria sono definiti da ciò che vede un osservatore il cui occhio si avvicina sempre più da un punto dello spazio. Si esamini la forma dello spazio con un telescopio a ingrandimento variabile, avente come centro un punto scelto *x*. A ingrandimento 1, il campo visivo abbraccia la geometria globale dello spazio, la cui forma può essere estremamente complicata (livello 1). Se l'ingrandimento aumenta, nel campo visivo appare una porzione più piccola di spazio, il cui aspetto è un disco più o meno incurvato; è lo spazio della geometria macroscopica (livello 2). Se l'ingrandimento aumenta ancora, il disco si riduce a un intorno sempre più piccolo di un punto, e la sua curvatura diviene impercettibile e pare piatta; è lo spazio della geometria locale (livello 3). A ingrandimento quasi infinito, si coglie la stıuttura microscopica dello spazio, che può ridiventare molto complicata (livello 4). Nella colonna a destra ho indicato le varie teorie della fisica di base che, allo stadio attuale della ricerca, appaiono più adatte a descrivere correttamente il livello di ingrandimento corrispondente.

5

SPAZIO ASSOLUTO O RELATIVO?

> Quando, in una data camera, si cambia il posto del letto, si può dire che si cambia camera, o cosa?
>
> GEORGES PEREC

Le numerose speculazioni sulla natura dello spazio, elaborate dall'Antichità ai giorni nostri, possono essere classificate in due grandi categorie: quelle dello spazio assoluto e quelle dello spazio relazionale, a seconda che lo spazio sia supposto subire o meno l'influenza della materia che contiene. Tali speculazioni hanno di volta in volta ottenuto il favore dei fisici. All'inizio del XVIII secolo, per esempio, lo spazio assoluto predicato da Newton ha trionfato sullo spazio relazionale sostenuto da Cartesio prima e da Leibniz poi. All'inizio del XX secolo la bilancia ha cominciato a pendere dall'altra parte. Con la teoria della relatività generale le concezioni dello spazio e del tempo hanno subito notevoli rimaneggiamenti. Oggi, a un secolo di distanza, la maggior parte delle persone non sa che il passaggio dalla fisica newtoniana a quella einsteiniana ha costituito uno dei più formidabili sconvolgimenti intellettuali che la Storia abbia mai conosciuto e di cui non si sono ancora comprese appieno le conseguenze. A prima vista, la cosa sembrerebbe di poco conto, degna al più dell'interesse di una conventicola di specialisti: l'attrazione universale di Newton è stata sostituita da un'altra teoria della gravitazione, la relatività generale di Einstein. Tuttavia, poiché questa coinvolge di-

rettamente la natura dello spazio e del tempo, il paesaggio dell'Universo è cambiato da cima a fondo.

Nella visione newtoniana del mondo lo spazio è un fondale dato *a priori* e assoluto, nel senso che le distanze sono le stesse per tutti gli osservatori che le misurano, indipendentemente dalla loro posizione o dalla loro velocità. Tale spazio è descritto dalla struttura geometrica più semplice (la sola nota a Newton): quella dello spazio euclideo tridimensionale, d'estensione infinita. Il tempo è anch'esso assoluto, ed è rappresentato da uno spazio matematico a una dimensione: una retta orientata dal passato al futuro. È all'interno di questa cornice prestabilita di spazio e di tempo, fissata una volta per tutte, che si muove la materia. Per spiegare il movimento dei corpi è tuttavia necessario far intervenire un concetto supplementare, quello di forza. Vediamo perché. Un corpo in movimento, se non è soggetto ad alcuna forza, deve seguire una retta dello spazio. Ora, si osserva che le traiettorie dei corpi soggetti alla gravità non sono rettilinee: una cometa, per esempio, passando vicino al Sole, è deviata dalla linea retta, e i pianeti seguono delle ellissi. Il problema della meccanica celeste risiede allora interamente nell'azione fisica: bisogna inventare delle forze che sottraggano il sistema alla sua traiettoria naturale. L'idea di Newton fu di immaginare che tutti i corpi massivi, dalla mela che cade da un albero alla Luna che gravita intorno alla Terra o alla stessa Terra che orbita intorno al Sole, fossero sottoposti a una medesima forza: l'attrazione universale. A suo dire, ogni corpo massivo esercita sugli altri corpi un'azione attrattiva a distanza. Questa spiegazione della gravitazione in termini di forza si aggiunge alla struttura assoluta dello spazio e del tempo. Analogamente, tutte le leggi della fisica classica, comprese quelle enunciate in seguito, nel XIX secolo, per descrivere i fenomeni elettrici e magnetici, sono definite all'interno di questo rigido scenario: tutti i corpi, terrestri o celesti che siano, si muovono sotto l'azione di forze in una cornice geometrica relativamente povera.

5.1 L'Universo newtoniano

Questa immagine dello spazio cosmico newtoniano permette di visualizzare la struttura dello spazio euclideo infinito, tessuto da raggi luminosi dotati di traiettorie rettilinee. Pianeti, stelle e galassie si muovono lungo orbite incurvate da una forza d'attrazione gravitazionale.

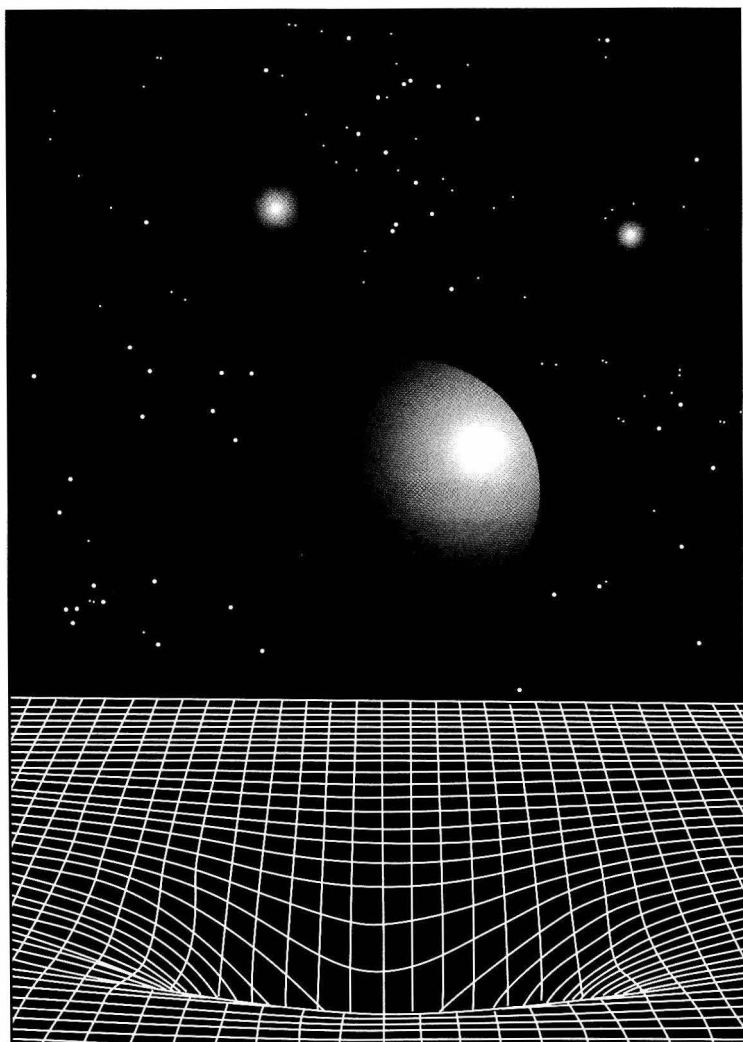
La visione einsteiniana del mondo, riassunta dalle due teorie della relatività, è radicalmente diversa. Ed è in termini di geometria che queste teorie possono essere più facilmente spiegate.

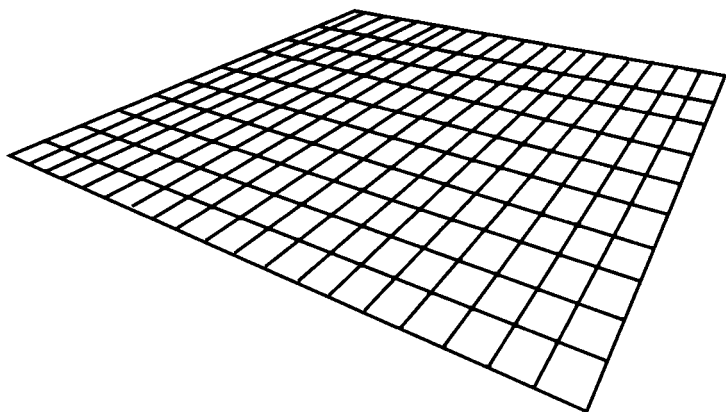
La relatività ristretta, che tratta dei movimenti uniformi a velocità costante, si accontenta ancora di una geometria senza curvatura; ma lo spazio e il tempo fanno ora parte di una struttura a quattro dimensioni, lo spazio-tempo. Le equazioni che descrivono, per esempio, fenomeni assai curiosi, come la dilatazione apparente delle durate e la contrazione delle lunghezze, si riducono essenzialmente al teorema di Pitagora generalizzato a quattro dimensioni, fatta salva una sottigliezza: la coordinata temporale t si distingue dalle coordinate spaziali (x, y, z) dal momento che il quadrato dell'intervallo temporale

ha segno *meno*: $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, dove c è la velocità della luce. Si dice che lo spazio-tempo ha una "segnatura" +++– (tre dimensioni di spazio e una di tempo), e che la sua geometria è "pseudoeuclidea" (la parte propriamente spaziale si riduce allo spazio euclideo).

La relatività generale tratta della gravità, descrivendola non più come una forza a distanza, bensì come una manifestazione locale della geometria non euclidea dello spazio-tempo. Einstein scelse, infatti, di eliminare l'azione fisica della gravitazione, e il prezzo da pagare fu il necessario arricchimento della geometria soggiacente. Ciò portò a considerare spazi non euclidei, le cui rette non sono più quelle della geometria ordinaria. La deviazione della traiettoria di una cometa è ora interpretata come conseguenza del fatto che la geometria dello spazio-tempo è incurvata dalla presenza del Sole. La traiettoria seguita dalla cometa resta una "retta" in una geometria curva: un filo teso seguirebbe questa traiettoria.

Lo spazio-tempo relativistico è dunque dotato di curvatura. Quando si misurano le distanze in tale universo curvo (in una forma matematica detta "metrica"), il teorema di Pitagora si traduce in una formula un po' più complicata. La segnatura è sempre +++– (tre coordinate di spazio e una di tempo), ma la parte spaziale è uno spazio curvo, detto "riemanniano". [▶ **p. 263, La matematica cosmica**]

Ciascuno può fabbricarsi il proprio campione di spazio-tempo elastico. Ma per renderne più facile la visualizzazione e poterlo manipolare senza difficoltà nello spazio ordinario, occorre ancora una volta limitarsi a due dimensioni: un pezzo di collant, teso e fissato su una cornice rigida, fa al caso nostro. Ho costruito questo oggetto per la prima volta dodici anni fa, in occasione di una trasmissione divulgativa della televisione italiana, in cui dovevo presentare il mio libro sui buchi neri, fresco di traduzione nella lingua di Dante. Il responsabile, alquanto preoccupato, mi aveva supplicato di trovare una metafora visiva spettacolare per evitare che il pubblico cambiasse immediatamente canale. Non c'è analogia che non

5.2 L'Universo relativistico

La relatività generale offre una nuova visione dell'Universo in termini di spazio-tempo flessibile, tessuto dalla luce, incurvato dalla materia. La meccanica celeste per Einstein assomiglia a una partita a tennis che si gioca non più su un terreno duro come in Newton, bensì su un trampolino: il gioco è molto più complicato poiché i giocatori e, in misura minore, la pallina, deformano il terreno con i loro movimenti e i loro spostamenti. Con la relatività generale lo spazio acquista una modellatura più variata rispetto allo smorto piano euclideo.

5.3 Tessuto elastico piatto

In assenza di massa, vale a dire di gravità, il tessuto dello spazio-tempo non ha alcuna curvatura. I tragitti dei raggi luminosi tracciano una quadrettatura rettilinea che definisce la geometria euclidea dello spazio.

sia in qualche punto difettosa; ma è un gioco di cui occorre conoscere e rispettare le regole. Mi sono recato in un negozio di biancheria per signora di Roma. Ho chiesto un paio di collant di taglia piuttosto grande, ho aperto la confezione e, di fronte allo sguardo esterrefatto del negoziante, ho tagliato un pezzetto del collant con un paio di forbici e lo ho tirato in ogni direzione per controllarne l'elasticità. Ci è mancato poco che il negoziante non chiamasse i carabinieri che passavano per strada e denunciasse il maniaco... Soddisfatto, mi sono poi recato in un negozio di giocattoli dove ho comperato delle palle e biglie differenti per massa, grandezza, densità e colore. La sera, la mia esibizione ha avuto il suo piccolo effetto. Da allora, utilizzo regolarmente nelle mie conferenze pubbliche tale dispositivo, sempre con successo. Vi sfido, perciò, a costruire un simile marchingegno dalle virtù pedagogiche così sorprendenti.

Prima manipolazione: teniamo il tessuto sospeso per aria senza che vi sia sopra alcun oggetto. Il tessuto non ha forma

né struttura. O, piuttosto, possiede la struttura geometrica più semplice di tutte, quella del piano euclideo. Visualizziamo così la concezione newtoniana dello spazio. La maglia rettilinea materializza i tragitti dei raggi luminosi. Tesse un sistema di coordinate universale che definisce l'architettura dello spazio.

Ricordiamoci che Newton supponeva uno spazio assoluto rigido, vale a dire uno spazio che non fosse influenzato dai corpi materiali che si trovano in esso. Quale che sia il contenuto, il contenente non è flessibile. Poniamo dunque la cornice elastica su un tavolo, per imporle la non flessibilità,[1] e piazziamo al centro una palla, per raffigurare un corpo di massa pari a quella del Sole. Non accade nulla di particolare. Se aggiungiamo una piccola biglia raffigurante un pianeta e le diamo una spinta, essa avrà la tendenza a muoversi in linea retta – in altre parole, a seguire la trama rettilinea della cornice. Ma non è questo che accade in natura: il pianeta deve ruotare intorno al Sole lungo un'ellisse. Per spiegare tale deviazione rispetto al movimento naturale bisogna fare appello a una forza centrale che impedisca alla biglia di partire in linea retta. Inoltre, questa forza agirà a distanza (senza contatto) e istantaneamente.

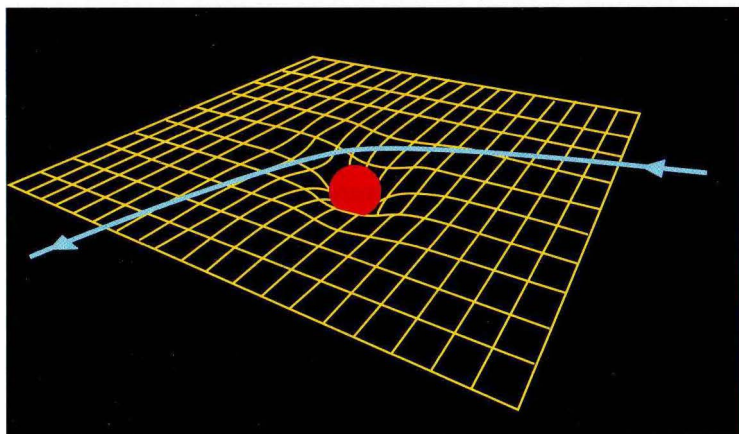
Nella visione einsteiniana il tessuto elastico è piatto solo se è vuoto di materia. Solleviamo dal tavolo la cornice, in mezzo alla quale vi è sempre la palla-Sole. Che cosa accade? La massa genera una cavità, una deformazione del tessuto che si traduce nel fatto che gli stessi raggi luminosi – la trama del collant – si incurvano intorno a quella massa. Vediamo che la maglia aderisce alla curvatura, e dunque che lo spazio-tempo continua a essere tessuto dalle traiettorie dei raggi luminosi. Da qui l'idea che intorno a grandi masse, nei paraggi del Sole per esempio, i raggi luminosi vedano le loro traiettorie deviate dalla gravitazione. Tale curvatura, al pari del campo gravitazionale, varia in ciascun punto, e può essere negativa, positiva o nulla. Così,

1. Una griglia per il barbecue farebbe meglio al caso nostro, dal momento che non avrebbe bisogno di un supporto rigido per restare non flessibile. Mi rendo conto, però, che non sarebbe comoda da trasportare...

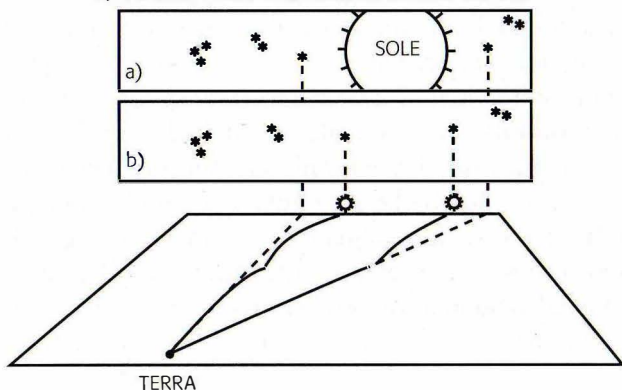
la curvatura del tessuto tende a zero man mano che ci si allontana dalla palla centrale.[2]

In questa concezione la gravitazione non è una forza che agisce a distanza; è soltanto una manifestazione locale della curvatura. Se gettiamo sul tessuto la piccola biglia che raffigura un pianeta, essa, senza aver bisogno d'essere soggetta a una forza d'attrazione, segue l'andamento naturale del tessuto (in condizioni reali il fenomeno sarebbe falsato a causa delle forze di attrito che farebbero cadere direttamente la biglia nella cavità!). Un andamento naturale in uno spazio curvo è chiamato una *geodetica*. Si tratta dell'equivalente della retta nello spazio piatto, ossia della linea dal cammino più breve. Ora, le geodetiche di uno spazio-tempo incurvato da una massa sferica centrale sono viste, in tre dimensioni, come delle ellissi. Meglio ancora: ellissi il cui asse maggiore ruota lentamente nel corso del tempo. La relatività generale rende conto così di un fenomeno che era stato osservato dagli astronomi sin dalla metà del XIX secolo e che la teoria newtoniana lasciava inspiegato: l'avanzamento del perielio del pianeta Mercurio.

La relatività generale ci costringe a rivedere i concetti stessi di tempo e di spazio. L'Universo non ha più una struttura di spazio euclideo immutabile, tessuta una volta per tutte; è uno spazio-tempo deformato dalla presenza di materia e di energia. Intorno a una massa come quella del Sole o di una qualsiasi stella – per non dire di una galassia – esiste una curvatura

2. L'esperimento del tessuto elastico offre soltanto un'analogia estremamente semplificata, che non va presa alla lettera: è la gravità terrestre, un campo gravitazionale che si aggiunge ed è esterno allo spazio bidimensionale del tessuto, a far sì che le biglie deformino il loro supporto, non il campo gravitazionale proprio delle biglie. Di fatto, per rappresentare lo spazio-tempo occorrerebbe una "spugna" molle a tre dimensioni, la cui forma cambi nel corso del tempo. Tuttavia, con buona pace dei puristi, la metafora del tessuto non è poi così fallace: i cosiddetti diagrammi di "immersione" sono una tecnica matematica che permette di visualizzare la forma di uno spazio immergendolo in uno spazio fittizio di dimensione superiore. È quello che fa automaticamente il nostro cervello quando visualizza le superficie. Tale tecnica, applicata alla rappresentazione dello spazio-tempo deformato da una massa sferica, dà una forma che evoca davvero quella del tessuto elastico incavato dal peso di una biglia. Vedi al riguardo il capitolo XII del mio libro *I buchi neri*, tr. it. Nardi, Firenze 1992.

5.4 Tessuto elastico curvo

Nella concezione relativistica la gravità è una forza illusoria creata dalla curvatura dell'Universo. Un astro di massa pari a quella del Sole imprime una cavità nel tessuto elastico dello spazio-tempo. Le traiettorie dei corpi aderiscono naturalmente alla curvatura del tessuto.

a) Posizione apparente delle stelle durante un'eclisse di Sole
b) Posizione reale delle stelle in assenza del Sole

5.5 La deviazione dei raggi luminosi da parte del Sole

Quando il Sole si proietta davanti a uno sfondo lontano di stelle (visibili unicamente nel caso di un'eclisse totale sufficientemente lunga), curva lo spazio-tempo nel suo intorno e devia i raggi luminosi che vengono dallo sfondo. La posizione apparente delle stelle (a) è sfasata rispetto alla loro posizione reale (b).

che misura lo scarto delle proprietà geometriche dell'Universo rispetto alle proprietà dello spazio euclideo.

Il nostro pezzetto di collant può servire per approfondire ulteriormente il contenuto della teoria. Abbiamo visto che ponendovi una stella, vale a dire una palla di una certa massa, otteniamo una certa curvatura. Se aggiungiamo un'altra stella avente esattamente la stessa taglia della precedente, ma una massa maggiore, ossia una densità più elevata, la deformazione del tessuto è molto più significativa. Tale proprietà della gravitazione è catturata dalle equazioni del campo gravitazionale date da Einstein nel 1915, le quali traducono il modo in cui la distribuzione e il movimento dei corpi materiali dell'Universo determinano la curvatura dello spaziotempo. [► **p. 263, La matematica cosmica**]

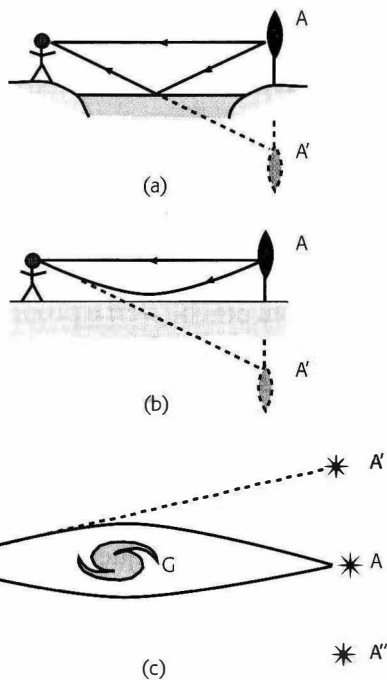
6

MIRAGGI CELESTI

> Il suo occhio è come il quadrifoglio dello spazio.
>
> BLAISE CENDRARS

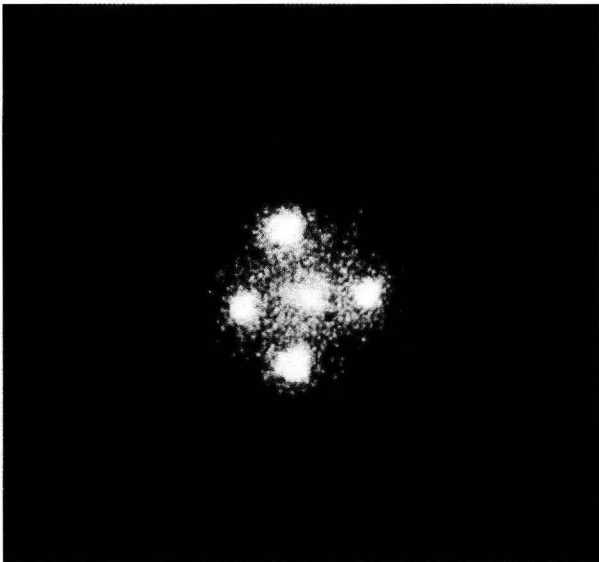
Il nostro pezzetto di collant ci permette pure di comprendere facilmente perché uno spazio incurvato dalla gravità introduca deformazioni ottiche, veri e propri miraggi celesti. In certe situazioni, infatti, lo spazio curvo moltiplica le traiettorie dei raggi luminosi. Supponiamo che il nostro occhio sia in uno degli angoli del tessuto e che osservi una stella luminosa che si trova nell'angolo opposto. Ora, sulla visuale, abbiamo posto un corpo dotato di una certa massa: i raggi luminosi che provengono dalla stella lontana, che resta sullo sfondo rispetto al corpo intermedio, avranno dunque traiettorie incurvate e raggiungeranno il nostro occhio venendo da più direzioni diverse. (Bisogna, ovviamente, immaginare il fenomeno in tre dimensioni.) Il corpo intermedio può essere molto semplicemente il Sole. Il primo controllo sperimentale della teoria della relatività generale fu proprio un'eclisse di Sole, nel 1919. L'astronomo britannico Arthur Eddington osservò per la prima volta che le stelle situate sullo sfondo, ma al bordo del limbo solare, erano leggermente spostate dalla loro solita posizione – ossia in assenza del Sole sulla visuale – e che lo scarto angolare era esattamente quello predetto dalla teoria di Einstein.

Più in generale, l'oggetto massivo in primo piano può essere

una stella, un buco nero, una galassia intera, un ammasso di galassie, ecc. Le sorgenti situate sullo sfondo sono stelle, galassie molto lontane, quasar. In condizioni ideali – una sorgente luminosa distante, una galassia massiva intermedia e un osservatore terrestre perfettamente allineato –, l'osservatore dovrebbe vedere un'immagine della sorgente deformata dalla galassia in primo piano in un anello di luce. È quello chi si chiama "miraggio gravitazionale". La curvatura dello spazio-tempo, prodotta da

6.1 Il principio dei miraggi

(a) A causa della riflessione della luce su una superficie acquosa situata tra l'osservatore e l'oggetto *A*, due raggi luminosi provenienti da *A* si incontrano di nuovo: vi è un raddoppiamento dell'immagine.
(b) In un miraggio terrestre, i raggi luminosi provenienti da *A* sono rifratti e deviati attraversando gli strati d'aria sovrariscaldati vicino al Sole. Anche qui vi è una moltiplicazione delle immagini.
(c) In un miraggio gravitazionale, un corpo massivo *G* situato tra l'osservatore e la sorgente luminosa *A* devia, deforma e moltiplica le immagini di *A*.

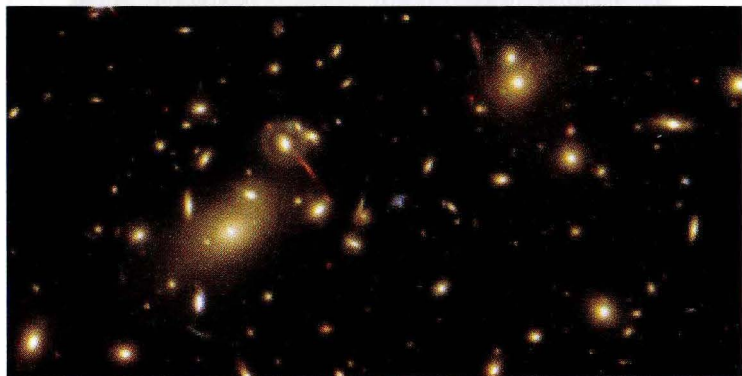
un oggetto situato sulla visuale e facente funzione di lente gravitazionale, genera illusioni ottiche per tutti gli oggetti situati sullo sfondo, poiché la curvatura moltiplica i tragitti dei raggi luminosi. Si è dovuto attendere fino al 1979 perché i potenti telescopi cogliessero i miraggi gravitazionali, non sotto l'aspetto ideale di un anello, bensì sotto quello di un quasar multiplo.

Lasciamo ora il tessuto per ammirare un'immagine astronomica presa al telescopio che rivela la realtà dello spazio-tempo curvo e dei suoi miraggi gravitazionali (figura 6.2). Questo superbo oggetto cosmico chiamato Croce di Einstein mostra quattro immagini di un solo astro, un quasar molto lontano situato sullo sfondo di una galassia vicina. Perché quattro immagini? Sulla visuale si trova una lente massiva, che è visibile al centro della croce ed è una galassia a spirale. Vi è dunque una moltiplicazione delle immagini che provengono dallo sfondo. Come sia-

6.2 La Croce di Einstein

Questo miraggio gravitazionale è stato fotografato dal telescopio spaziale Hubble. Un quasar, situato a otto miliardi di anni luce, è osservato in quattro esemplari attraverso una galassia-lente (al centro), venti volte più vicina.

mo certi che si tratti dello stesso quasar? I quasar sono oggetti di luminosità variabile; la loro curva di luce – la variazione della loro luminosità nel corso del tempo – è una vera e propria carta d'identità. Per essere sicuri che le quattro immagini siano quelle di uno stesso quasar basta seguire le loro curve di luce e constatare che sono identiche, dopo un certo intervallo temporale, corrispondente al differente tempo di tragitto per i raggi luminosi che aderiscono ai diversi contorni dello spazio curvo.

Attualmente sono state individuate alcune decine di miraggi gravitazionali, tutti di caratteristiche diverse. Ci piacerebbe vedere anelli di luce perfetti; dovremmo, però, disporre di una lente sferica collocata esattamente sulla visuale. Ma, in natura, la situazione non è mai quella ideale: dobbiamo perciò accontentarci di frammenti d'anello. In alcuni casi, vicini alla perfetta simmetria, osserviamo archi gravitazionali (figura 6.3).

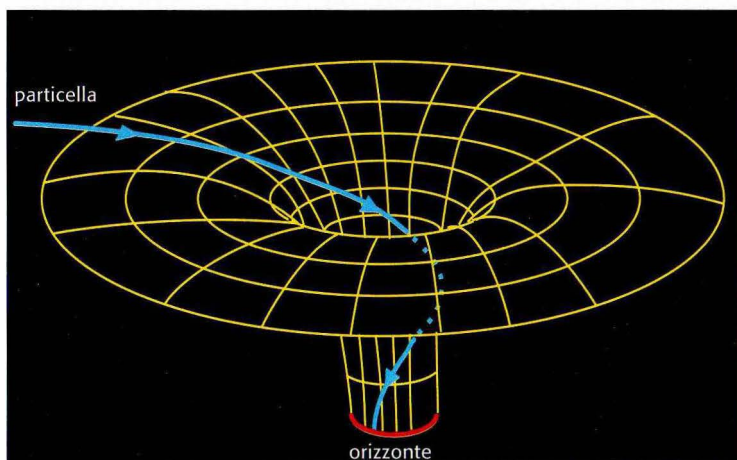
Vedremo in seguito come i "miraggi topologici", creati da una topologia per così dire a *chiffon* dell'Universo, possano produrre moltiplicazioni di immagini ancor più sorprendenti degli stessi miraggi gravitazionali.

6.3 Archi gravitazionali

I miraggi gravitazionali più spettacolari inducono la formazione di archi luminosi. Tali archi sono immagini estremamente deformate di galassie lontane, situate sullo sfondo dell'ammasso di galassie Abell 2218 (in giallo nella foto). L'effetto gravitazionale dell'ammasso curva i raggi luminosi e deforma le immagini, fino a dar loro la forma caratteristica ad arco.

7

BUCO NERO

> Ove un corpo solare oscuro, infinito, plumbeo, inghiottirebbe fiamme e soli, senza diventare più luminoso.
>
> JEAN-PAUL RICHTER

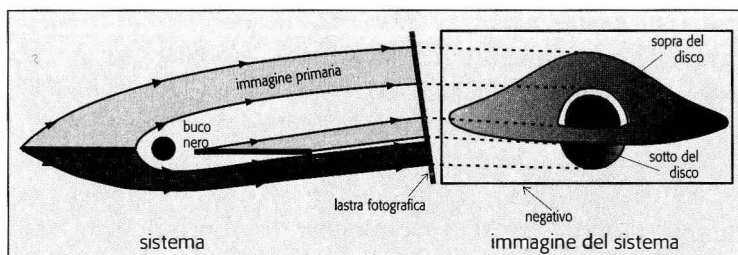
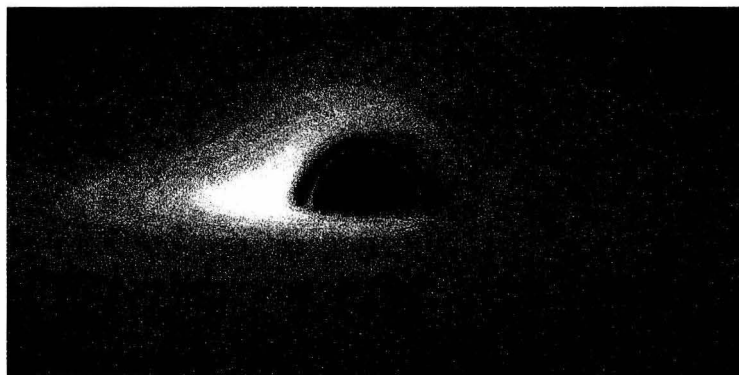
La nozione di buco nero è l'estrema conseguenza della flessibilità dello spazio-tempo. Muniti ancora del nostro tessuto elastico, immaginiamo di porvi dentro una biglia così densa da scavare un pozzo insondabile, al punto che nulla, una volta lasciato il bordo del pozzo, possa mai uscirne. È davvero un buco? Comunque, è un pozzo "infinitamente" profondo, nel senso che ci vorrebbe un'energia infinita per uscirne, qualora ci si fosse avventurati all'interno della zona critica delimitata dal bordo del pozzo. Stando così le cose, lanciamo una biglia nelle vicinanze del buco, ma non direttamente verso di esso, e diamole sufficiente velocità; la biglia è deviata, poiché aderisce alla curvatura dello spazio, ma possiede sufficiente energia per evitare di cadere nel pozzo. Tuttavia, vi è un angolo critico al di sotto del quale la biglia sarà catturata, indipendentemente dalla sua velocità – anche se fosse pari a quella della luce, vale a dire anche se, al posto della biglia, avessimo tirato un fotone, un corpuscolo di luce. Anche il fotone sarà catturato dal buco. La definizione relativistica di buco nero discende da questa dimostrazione: è una regione confinata dello spazio-tempo da cui la luce e la materia non possono scappare. Il bu-

7.1 Il pozzo del buco nero

Il buco nero scava un pozzo così profondo nel tessuto elastico dello spazio-tempo che ogni particella od ogni raggio luminoso che ne supera il bordo viene catturato. La superficie del buco nero, detta orizzonte, non ha alcuna consistenza materiale: è la frontiera puramente geometrica di una zona di non ritorno.

co nero è un corollario naturale e ineliminabile della teoria della relatività.

Per la stessa ragione per cui generano le deformazioni estreme del tessuto elastico dello spazio-tempo, i buchi neri creano le più forti deviazioni dei raggi luminosi che passano nelle loro vicinanze, dando luogo alle più spettacolari illusioni ottiche. Uno degli aspetti che mi hanno particolarmente interessato nella scienza concerne tutto quello che pone un problema di visualizzazione. L'esempio tipico è, certo, quello del buco nero, concetto affascinante ma per definizione impossibile da visualizzare direttamente. Se ne possono comprendere tutte le proprietà soltanto risolvendo le equazioni appropriate della relatività generale, e una simile comprensione è riservata agli specialisti. Se, malgrado ciò, si vuole darne una rappresentazione, si può immaginare, per esempio, che questo buco nero sia contornato da un gas caldo, che in qualche modo lo illumina e rivela la presenza dell'invisibile. A tale ar-

gomento ho dedicato uno dei miei primi lavori di ricerca. Alla fine degli anni Settanta del Novecento ho realizzato al computer una fotografia virtuale di buco nero. Oggi è possibile osservare buchi neri indirettamente, ossia tramite gli effetti che producono sul loro ambiente: il loro potente campo gravitazionale aspira la sostanza gassosa delle stelle vicine in strani vortici, detti "dischi di accrescimento". Tali fenomeni sono stati rilevati in alcuni sistemi di stelle doppie che emettono raggi X (buchi neri di circa 10 volte la massa del Sole) e al centro di numerose galassie (buchi neri la cui massa è compresa tra un milione e un miliardo di volte la massa del Sole).

La figura 7.2 mostra come si vedrebbe un buco nero contornato da un disco di gas. Le immagini subiscono deformazioni ottiche straordinarie. Tutto ciò è perfettamente spiegato dalla relatività generale. Prendiamo un buco nero e un disco di gas sottile visto in sezione, così che un osservatore lontano o una lastra fotografica possa, se lo si vuole, immortalare la scena. In una situazione normale, ossia nello spazio euclideo, la curvatura dello spazio è debole. È il caso del Sistema solare in cui si osserva il pianeta Saturno circondato dai suoi sontuosi anelli, con un angolo di visione leggermente al di sopra del piano. Certo, una parte degli anelli è nascosta dietro il pianeta, ma non è difficile completare mentalmente la loro traccia ellittica. Intorno a un buco nero le cose vanno in maniera del tutto differente, a causa delle deformazioni ottiche dovute alla curvatura dello spazio-tempo. In particolare, si vede la parte superiore del disco nella sua totalità, indipendentemente dall'inclinazione dello sguardo. La parte anteriore del disco non è nascosta dal buco nero, poiché le immagini che ne provengono sono in qualche modo rilevate dalla curvatura dello spazio e raggiungono l'osservatore lontano. Molto più sorprendentemente, si vede anche la parte inferiore del disco gassoso. Infatti, i raggi luminosi che normalmente si propagano verso il basso, in una direzione opposta a quella dell'osservatore, risalgono verso l'alto e forniscono un'"immagine secondaria", visione assai deformata della parte inferiore del disco. In teoria, esiste un'immagine

7.2a

7.2b

7.2 Il buco nero fotografato

7.2a. Un buco nero circondato da un disco sottile di gas è visto da molto lontano, in una direzione lievemente inclinata rispetto al piano del disco. La relatività generale consente di calcolare la deviazione dei raggi luminosi dovuta alla forte curvatura dello spazio-tempo vicino al buco nero; questa permette di vedere l'intera parte superiore del disco e una porzione di quella inferiore.
7.2b. Tenendo conto anche delle proprietà fisiche del disco gassoso – rotazione (che dà l'asimmetria destra sinistra del flusso luminoso), temperatura, emissività –, questa simulazione di un'immagine fotografica di un buco nero circondato da un disco di gas luminoso è stata realizzata al computer all'Osservatorio di Meudon nel 1979.

terziaria che dà una visione della parte superiore distorta dopo che i raggi luminosi hanno compiuto tre semi-giri, e poi un'immagine di ordine 4 che dà una visione della parte inferiore più schiacciata ancora, e così via all'infinito.

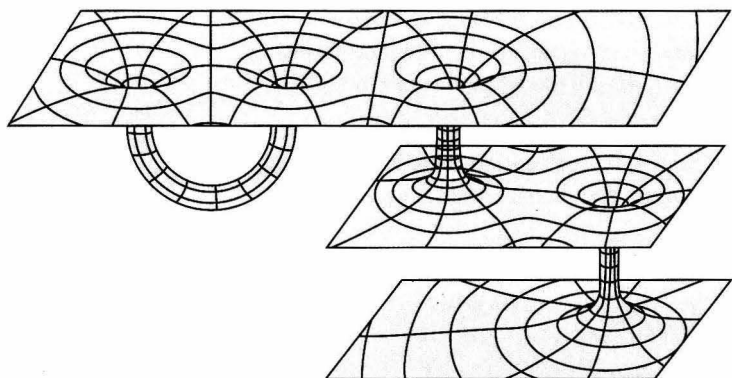
Per rendere adeguatamente l'immagine finale non vi è nulla di meglio dei versi scritti da Gérard de Nerval più di un secolo fa:

L'occhio di Dio cercavo, ho visto solo un'orbita
Vasta e vertiginosa – la notte che l'abita
S'irradia sul mondo e via via s'incupisce;

Arcobaleno arcano circonda il pozzo scuro,
Soglia del caos antico la cui ombra è il nulla,
Spirale che divora i Mondi e i Giorni![1]

Fin qui l'esterno del buco nero. Ma che cosa accade all'interno? Riprendiamo il nostro tessuto elastico. Se scaviamo un pozzo sufficientemente profondo da simulare un buco nero, che cosa accade sul fondo? Vi è un nodo che blocca lo spazio-tempo (ciò che in matematica si chiama una "singolarità", dove la curvatura diventa infinita) oppure il tessuto è bucato? In quest'ultimo caso, l'apertura è un buco spalancato oppure assomiglia a un pertugio verso l'esterno? Come agiscono le distorsioni spazio-temporali sul tessuto elastico? Soltanto le soluzioni matematiche della relatività generale possono farci da guida. La possibilità più spettacolare, anche se altamente speculativa, è una struttura geometrica bizzarra, che ha per nome *wormhole*, letteralmente "cunicolo di tarlo": questa sorta di tunnel collegherebbe il fondo del buco nero a una regione dell'Universo che è chiamata "buco bianco", poiché funzionerebbe all'opposto di un buco nero. Stando ad alcuni modelli, tale regione potrebbe trovarsi addirittura in un altro Universo. Questa soluzione matematica delle equazioni della relatività schiude prospettive particolarmente nuove per i viaggi spazio-temporali, giacché offre scorciatoie spazio-temporali che consentirebbero di percorrere tragitti, che altrimenti richiederebbero vari milioni di anni luce, in qualche frazione di secondo, senza però oltrepassare la velocità della luce. Alcune traiettorie potrebbero persino risalire il tempo!

Piano, però, con l'entusiasmo! L'esistenza di un fenomeno del genere, sfruttato dai racconti di fantascienza, è oggetto di uno studio molto serio nei nostri laboratori; e per la maggior

1. G. de Nerval, *Cristo al Monte degli Ulivi*, tr. it. in *Chimere e altre poesie*, Einaudi, Torino 1974.

7.3 Cunicoli

I cunicoli possono porre in connessione tra loro regioni distanti dell'Universo e consentire viaggi interstellari nello spazio e nel tempo. Potrebbero persino collegare una serie infinita di universi paralleli.

parte gli specialisti ritengono che, in condizioni ordinarie, vale a dire nel caso di buchi neri stellari e galattici, questo tipo d'anomalia spazio-temporale non possa formarsi. Un cunicolo, infatti, è fondamentalmente instabile: non appena formato in condizioni idealizzate, il tunnel verrà distrutto dalla minima particella o dal minimo raggio luminoso che entrano nel buco. I modelli fisici sono elaborazioni di equazioni matematiche, ma solo poche delle soluzioni sono pertinenti per la fisica, ossia per la descrizione dell'universo reale.[2]

2. Tuttavia, alla scala dei microbuchi neri, retta dalle leggi della meccanica quantistica, tale viaggio sarebbe possibile e particelle elementari potrebbero imboccare fugacemente questi tunnel transitori per risalire il tempo!

8

SCHIUMA, STRINGHE E FILI

> Quanti mondi malfatti, imperfetti, si sono dissipati, si riformano e si dissipano forse in ogni istante...
>
> DENIS DIDEROT

Nelle considerazioni precedenti sulla forma dello spazio non abbiamo mai abbandonato il "livello intermedio", quello compreso tra 10^{-18} e 10^{25} metri, dove il limite superiore di questo intervallo corrisponde all'incirca a un decimo del raggio dell'universo osservabile.

Discuterò ora brevemente della forma dello spazio nel dominio situato all'estremità inferiore di questo intervallo, vale a dire al livello microscopico. La distanza di 10^{-18} metri è quella che attualmente siamo riusciti a esaminare in laboratorio.[1] In realtà, il fisico sperimentale utilizza l'acceleratore di particelle per esplorare le alte energie, ma le energie sono legate alle distanze: maggiore è l'energia comunicata alle particelle, che consente loro di entrare in collisione con altre particelle a velocità prossime a quelle della luce, più raffinato è l'esame dell'estensione spaziale di tali particelle, e più efficace è il controllo della struttura fine dello spazio. A questa scala, lo spazio fisico sembra poter essere sempre descritto da uno spazio matematico continuo – una "varietà differenziabile". Tuttavia, ri-

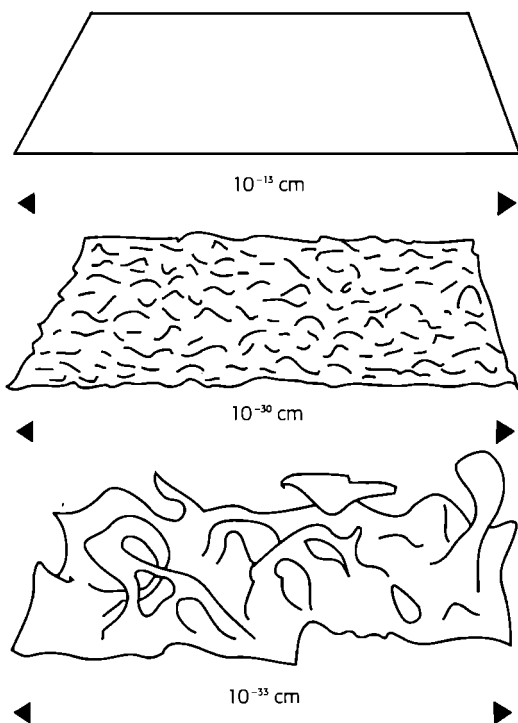
1. Il futuro acceleratore di particelle del CERN permetterà di indagare distanze dieci volte minori.

cercatori come Alain Connes ritengono che i risultati sperimentali ottenuti al CERN implichino già una struttura più complessa, che nel linguaggio dei geometri è detta *non commutativa*. In questo nuovo approccio lo spazio è definito non più in termini di punti caratterizzati da coordinate precise che commutano tra loro, bensì in termini di campi di interazioni. Certo è che, se si considerano distanze molto piccole, lo spazio deve rivelare una forma estremamente complicata, che richiede un paesaggio geometrico completamente nuovo.

Non si può comprendere lo spazio senza la gravità. La sua descrizione al livello subatomico, dove si intersecano relatività generale e meccanica quantistica, presuppone l'elaborazione di una teoria quantistica della gravità. Sarà questa la sfida maggiore per la ricerca di base del XXI secolo. Per cogliere la gravità quantistica, i fisici non sono avari di analogie e di metafore.

Una di esse, proposta negli anni Sessanta del Novecento da John Wheeler, è quella della schiuma spazio-temporale. Se da un aereo che vola ad alta quota osserviamo l'oceano, abbiamo l'impressione che esso sia liscio e piatto, o comunque debolmente curvato; lo descriveremo pertanto tramite uno spazio matematicamente semplice: un pezzo di piano euclideo o una porzione di superficie sferica a curvatura costante. Se ci avviciniamo, otteniamo una risoluzione migliore e vediamo apparire le onde; la superficie dell'oceano resta connessa, vale a dire unita insieme, e continua, ma acquista una curvatura variabile da luogo a luogo, a seconda dell'altezza delle onde. L'oceano è per così dire ammaccato. Infine, se scendiamo a pelo d'acqua, ossia se scrutiamo la superficie dell'oceano con la massima risoluzione possibile, possiamo descriverla soltanto grazie a uno spazio matematico estremamente complicato e la cui forma varia senza posa nel corso del tempo. È una schiuma ribollente che cambia le sue strutture spaziali di continuo, e in maniera imprevedibile. Lo spazio non è neppure connesso, giacché delle gocce si distaccano.

Per comprendere la struttura dello spazio a scala molto piccola, e per unificare al contempo le interazioni fondamen-

tali in base a teorie quali la gravità quantistica, alcuni fisici ritengono che lo spazio microscopico possa assomigliare a un tale oceano. Se si disponesse di una risoluzione sufficiente per accedere a distanze dell'ordine di 10^{-35} metri, una lunghezza caratteristica detta "lunghezza di Planck", verrebbe alla luce la struttura granulare e fluttuante dello spazio-tempo. La lunghezza di Planck è rispetto alla taglia di un nucleo atomico tanto piccola quanto il nucleo atomico lo è rispetto a noi.

8.1 La schiuma dello spazio-tempo

A livello macroscopico lo spazio-tempo è descritto da un continuo liscio, privo di asperità, simile alla superficie di un oceano vista da alta quota. Se ci si avvicina al livello quantistico, le fluttuazioni della geometria spazio-temporale risulteranno percepibili, come le onde dell'oceano. Se si raggiungesse davvero il livello quantistico (10^{-33} cm), le fluttuazioni dominerebbero completamente la geometria che diventerebbe allora estremamente tormentata e in perpetua trasformazione, come la schiuma delle onde.

Un simile approccio non ha quasi oltrepassato lo stadio dell'analogia, dal momento che gli strumenti matematici necessari, quali la comprensione della topologia dinamica, non sono sufficientemente sviluppati. Così, negli anni Ottanta del Novecento, un'altra ipotesi ha soppiantato quella della schiuma spazio-temporale: la teoria delle *stringhe* (o come altri dice *corde*) che afferma che i costituenti fondamentali della materia non sono particelle puntuali, bensì stringhe aperte o chiuse alla scala della lunghezza di Planck, le cui modalità di vibrazione definiscono le proprietà delle particelle. In tale prospettiva, lo spazio diviene un concetto derivato, che ha senso soltanto a una scala superiore a quella delle stringhe. La teoria delle stringhe, che si declina in sei varianti differenti, ha suscitato una tale infatuazione che alcuni fisici, negli anni Novanta, hanno potuto credere di trarne una "teoria del tutto". Ma le difficoltà matematiche sono notevoli, e non vi è certezza alcuna che possano essere superate in un prossimo futuro.

Di recente, le sei teorie delle stringhe hanno dato vita a una teoria che si suppone ancor più ampia e di cui le stringhe non sarebbero che i limiti; superficie bidimensionali e altri spazi di dimensione superiore, e non più soltanto linee unidimensionali, potrebbero vibrare come delle membrane – da cui il nome di *M-theory* dato a questa ipotesi unificatrice.[2] Sempre negli anni Novanta Abhay Ashtekar ha proposto un altro formalismo, in cui la varietà spazio-tempo è un'approssimazione valida a grandi distanze, mentre a brevi distanze la geometria sarebbe una sorta di tessitura, una interconnessione complessa di fili. Citiamo ancora la teoria dei *twistor* di Roger Penrose e la geometria non commutativa di Alain Connes, così ricche di prospettive.

La maggior parte di tali concezioni innovative fanno intervenire, per ragioni di coerenza interna, modellizzazioni di spazi a più di tre dimensioni. Esse apportano chiarimenti del tutto nuovi sulla nascita dello spazio e del tempo all'epoca del

2. Per alcuni ricercatori la lettera M può qui significare tanto "Meta" quanto "Mystery".

Big Bang: la cosmogenesi quantistica. Un oceano d'energia ribollente è associato al vuoto quantistico. Questa energia produce alcune fluttuazioni molto più importanti delle altre in tempi estremamente brevi, in virtù della disuguaglianza temporale di Heisenberg che, in meccanica quantistica, vincola l'estensione in energia a valori tanto più grandi quanto l'estensione temporale è più breve. In questo oceano quantistico, le maggiori fluttuazioni d'energia potrebbero espellere spontaneamente gocce di spuma che, una volta staccatesi, evolverebbero secondo le loro leggi proprie, sotto forma di intero universo. In un tale schema, sviluppato in particolare da Andrei Linde, il nostro Universo non sarebbe più unico: farebbe parte di un "multiverso". Il nostro Universo, la cui struttura e la cui storia gli astrofisici cercano laboriosamente di ricostruire effettuando osservazioni astronomiche ed elaborando modelli cosmologici, non sarebbe che una bolla piuttosto particolare che si sarebbe staccata dal vuoto quantistico circa quindici miliardi di anni fa – un tempo misurato dall'orologio che le è proprio. Il multiverso, esso sì libero dallo spazio e dal tempo, sarebbe una schiuma d'universo caotica, rigenerata senza posa, e generante bolle d'universo dalle interconnessioni perennemente cangianti, avendo ogni bolla proprietà differenti, compreso il numero delle dimensioni spaziali. Le affascinanti proprietà di tali scenari saranno trattate in un prossimo libro, complemento logico di *questo volume*.

9

DALLA RELATIVITÀ AL BIG BANG

> Vivaci nebulose cigolavano
> uno spazio formando a naso cavo.
>
> RAYMOND QUENEAU

Il resto del *volume* sarà dedicato alla descrizione dell'altra estremità della scala spaziale, quella che mette in gioco la forma *globale* dello spazio. Affrontare un argomento così grandioso e complesso servendosi della lingua di tutti i giorni ha i suoi rischi; come ha rimarcato Paul Valéry: "Le grandi parole: infinito, assoluto, natura [...], sono questi i pesi di cartone che solleva, brandisce e porta l'Ercole letterario".[1] Nondimeno, tentiamo l'avventura; e addentriamoci nel regno della cosmologia, la scienza che studia la struttura e l'evoluzione dell'Universo nel suo insieme.

Un giorno, alla fine di una conferenza su questo argomento, una persona del pubblico mi si avvicina e mi domanda con fare misterioso: "Ma allora, voi fate della *cosmetologia*?". Confesso che, sul momento, sono rimasto sorpreso, se non offeso, e istintivamente ho passato una mano nei capelli per essere sicuro di non aver esagerato con la lacca... Qualche tempo dopo, l'azienda L'Oréal mi chiede di presentare al personale un rapido panorama dell'evoluzione cosmica. Di fronte a un'assistente che teneva in gran cura trucco e manicure, ho a-

1. P. Valéry, *Oeuvres*, ed. a cura di J. Hytier, Gallimard, Paris 1987, vol. 2.

vuto la seguente illuminazione: *cosmetologia* e *cosmologia* derivano entrambe dal greco *cosmos* che significa "ordine, ornamento, bellezza".

Le grandi questioni sollevate dalla cosmologia vertono sull'organizzazione spaziale e temporale del cosmo. Gli interrogativi sul carattere finito o infinito dello spazio, l'inizio del tempo, il destino futuro dell'Universo, la costituzione della materia cosmica, la natura del vuoto hanno sfidato per millenni l'immaginazione umana. Se oggi ricevono qualche elemento di risposta, è grazie alla combinazione di progressi teorici e sperimentali. [▶ **p. 231, Questioni cosmiche**]

Divenuta per intero scienza solo nel XX secolo, la cosmologia continua tuttavia ad annoverare i suoi avversari nelle fila sia dei fisici, alcuni dei quali sostengono che essa poggi più sul mito che sull'esperienza, sia dei filosofi, alcuni dei quali pretendono che non vi sia alcuna "buona definizione" di Universo. I cosmologi di professione, però, sono decisi a esplorare il mondo anche senza averne una definizione! [▶ **p. 225, *Cosmos* e *logos***]

Alla scala cosmologica il paesaggio dello spazio e del tempo è governato dalla gravitazione. Gli stessi modelli d'Universo si basano sulla teoria fondamentale che descrive tale interazione: la relatività generale. I modelli cosmologici relativistici sono particolari soluzioni delle equazioni del campo gravitazionale, suscettibili di rappresentare non più soltanto una piccola regione dello spazio-tempo localmente incurvata da una stella, bensì l'Universo nel suo insieme, con i suoi miliardi di galassie, le sue radiazioni e tutte le sue componenti energetiche. [▶ **p. 263, La matematica cosmica**]

Le equazioni della relatività sono piuttosto complicate. Dal punto di vista matematico possiedono un gran numero di soluzioni; ma non tutte queste saranno possibili sul piano fisico: alcune, per esempio, violano leggi base che i fisici non sono disposti ad abbandonare, come la causalità; altre possono essere eliminate poiché sono in flagrante contraddizione con le osservazioni. Ahimè, le soluzioni restano ancora numerose, e il compito arduo. I cosmologi studiano dapprima i modelli più semplici, quelli che non contemplano alcuna posizione privi-

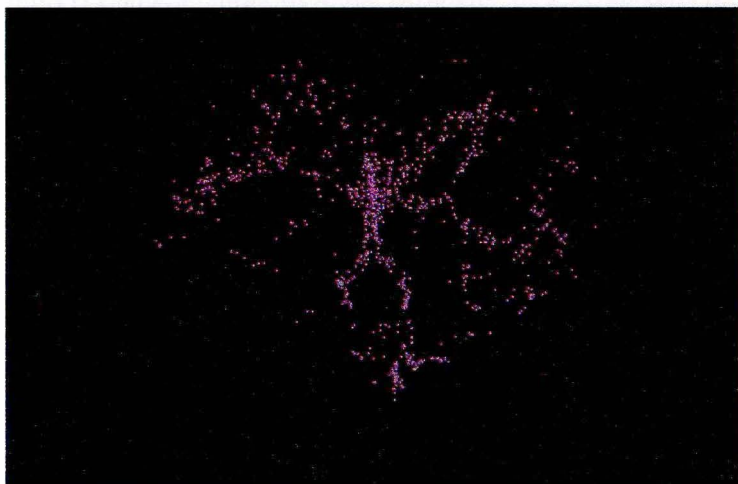
legiata nello spazio. Tale *omogeneità* presuppone che le proprietà fisiche dell'Universo (per esempio, la distribuzione media della materia) siano identiche in ogni punto dello spazio, benché possano cambiare nel corso del tempo.

I cosmologi suppongono, inoltre, che lo spazio sia *isotropo* (*iso* dal greco significa "uguale" e il verbo *trepein* vuol dire "voltare"), ovvero che non esista alcuna direzione privilegiata. Eliminano così gli eventuali universi in rotazione intorno a un asse particolare, nonché quelli che potrebbero dilatarsi o contrarsi a velocità differenti nelle diverse direzioni dello spazio.

Queste due simmetrie, omogeneità e isotropia, non vanno necessariamente di pari passo. Un campo illimitato di fili d'erba che crescono nella stessa direzione, e un universo in cui tutte le galassie avessero gli assi di rotazione paralleli, sono esempi di strutture omogenee senza essere isotrope; una superficie ovoidale è non omogenea (la sua curvatura varia), ma intorno ai suoi due "vertici" lo spazio è isotropo (la curvatura è la stessa in tutte le direzioni). [▶ **p. 311, La radiazione fossile**]

Esaminiamo ora questa doppia ipotesi fondamentale, secondo la quale lo spazio è omogeneo e isotropo. L'isotropia è, intorno a noi, giustificata dall'osservazione della "radiazione fossile", la reliquia raffreddata del Big Bang caratterizzata da una temperatura di fondo del cielo che si rivela identica, al centomillesimo circa, in tutte le direzioni intorno all'osservatore.

L'omogeneità può, invece, apparire un'ipotesi meno realistica. In primo luogo, per rendersi conto dell'omogeneità dello spazio, è necessario potersi spostare istantaneamente nell'Universo, e ciò è impossibile. L'osservatore immobile vede l'Universo a epoche differenti del passato, e non può dunque provare sperimentalmente l'omogeneità. Ma anche se non teniamo conto di questo fattore temporale, non possiamo che constatare come a piccola scala, ossia alle dimensioni spaziali esaminate nelle indagini sulle galassie, lo spazio non presenti alcuna traccia di regolarità. Le galassie sono raggruppate in ammassi, e gli ammassi in superammassi, separati da grandi zone apparentemente vuote (figura 9.1).

Tuttavia, a una scala più ampia di qualche centinaia di mi-

9.1 La Grande Muraglia cosmica

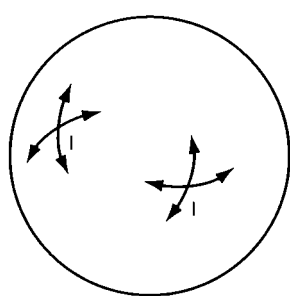
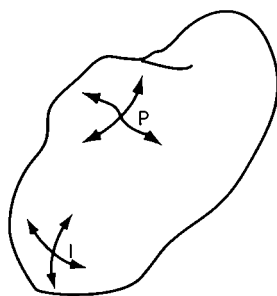
Le galassie si raggruppano in ammassi, e gli ammassi di galassie si raccolgono in strutture più ampie, i superammassi. La porzione di spazio qui raffigurata comprende più di mille galassie, raggruppate in filamenti organizzati intorno a bolle vuote. Una struttura bizzarra, dalla sagoma umana, vista di fronte, con braccia e gambe aperte, si staglia a 300 milioni di anni luce dalla Terra. Le braccia si dispiegano per più di 500 milioni di anni luce, ma il loro spessore non misura più di 15 milioni di anni luce – da qui il nome di "Grande Muraglia".

lioni di anni luce, corrispondente a volumi sufficientemente grandi per inglobare più ammassi di galassie, sembra che la materia sia statisticamente distribuita in maniera uniforme.

In termini più generali, è ragionevole presumere che lo spazio fisico sia equivalente in ciascuno dei suoi punti. Tale ipotesi, detta "principio cosmologico", non risulta soltanto dalla necessità di semplificare le cose. Costituisce un'estrapolazione alla scala universale dell'idea postcopernicana secondo la quale noi non siamo al centro del mondo: la nostra è una posizione qualsiasi, e non vi è alcuna ragione per pensare che le altre posizioni lo siano di meno; di conseguenza, tutte le posizioni sono equivalenti. E se lo spazio è omogeneo e isotropo intorno a noi, è isotropo in ogni punto.

L'omogeneità e l'isotropia si traducono matematicamente nel fatto che lo spazio deve possedere una curvatura media *co-*

stante. Poiché la curvatura è generata dalla materia, che quest'ultima sia distribuita in maniera uniforme implica che la curvatura a grande scala debba essere a sua volta uniforme. Per meglio visualizzare tutto ciò, riprendiamo la metafora del tessuto elastico. Nel caso del Sistema solare, vale a dire di una minuscola porzione d'Universo, abbiamo bisogno soltanto di una biglia che raffiguri il Sole. Questo corpo centrale genera una cavità e una curvatura variabile che tende a zero allorché ce ne si allontana all'infinito. Tutto intorno, i granelli di sabbia raffiguranti i pianeti hanno masse così poco rilevanti da non avere alcuna effettiva influenza sulla curvatura del tessuto. Se ora volessimo rappresentare l'intero Universo, avremmo bisogno di sviluppare una superficie immensa e di disporre sopra di essa in maniera regolare un gran numero di biglie che rappresentino le galassie e possiedano sensibilmente la stessa massa. Essendo la distribuzione di queste masse uniforme, è facile immaginare che il tessuto prenda una curvatura costante.

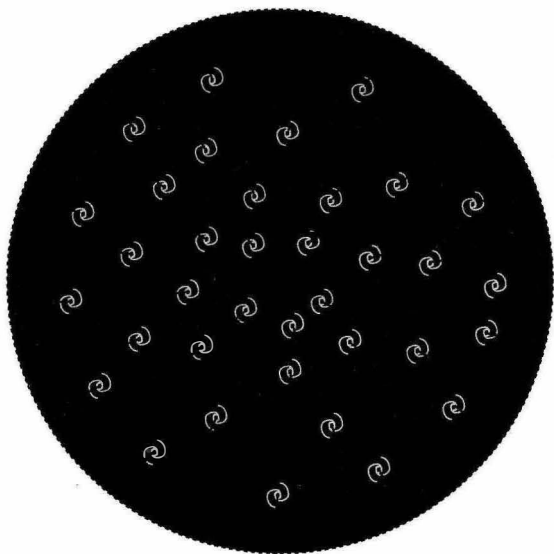
Accettiamo dunque l'ipotesi di un Universo omogeneo e isotropo, a curvatura costante. Tre possibilità si offrono ai cosmologi: questa curvatura può essere positiva, negativa o nulla.

9.2 Illustrazione del principio cosmologico

Sulla superficie di una sfera tutti i punti sono centri *I* di isotropia: la curvatura è la stessa misurata in tutte le direzioni. Sulla superficie di una "patata", solo punti eccezionali possono essere centri di isotropia. Il principio cosmologico impedisce all'osservatore terrestre qualunque posizione privilegiata di questo tipo: se l'Universo ci appare isotropo, allora deve esserlo in ogni suo punto. È dunque improbabile che la sua geometria sia anisotropa come la superficie di una patata.

Nel 1917 Einstein costruì il primo modello d'Universo fondato sulla teoria della relatività. Optò per una geometria non euclidea a curvatura positiva, che consentiva di rappresentare precisamente uno spazio insieme finito e illimitato: l'ipersfera, scoperta da Bernhard Riemann mezzo secolo prima, la quale aveva il vantaggio di evitare qualsiasi "paradosso del bordo". [▶ p. 205, Il paradosso del bordo]

Tuttavia, nell'indagarne la curvatura, Einstein si concentrò unicamente sull'aspetto spaziale dell'Universo e ne ignorò quello temporale, commettendo, come egli stesso ebbe a riconoscere in seguito, il più grande errore della sua vita: trascurare la *dinamica* cosmica. Il modello einsteiniano, infatti, oltre all'omogeneità dello spazio, ammetteva un'altra ipotesi all'apparenza naturale, e cioè che la circonferenza dell'Universo non variasse nel corso del tempo. Ora, l'intuizione filosoficamente profonda della relatività è che spazio e tempo sono, in una certa maniera, inseparabili. Applicato alla cosmologia, tale principio deve logicamente condurre a modelli d'Universo in cui architettura spaziale e storia sono indissociabili. Di fatto, parallelamente alla rivoluzione einsteiniana, i progressi registrati a livello osservativo portarono gli astronomi ad annunciare la scoperta di uno strano fenomeno: le altre galassie paiono allontanarsi sistematicamente dalla nostra, con velocità proporzionali alla loro distanza. Lo spettro della luce che riceviamo dalle altre galassie è spostato verso il rosso, ossia verso le lunghezze d'onda più lunghe – e ciò si può interpretare, in prima approssimazione, come un movimento di recessione generalizzato. [▶ p. 239, Galassie in fuga]

Posto di fronte ai dati sperimentali, il modello statico di Einstein dovette cedere il passo a modelli di Universi dinamici, cioè in evoluzione nel corso del tempo. Modelli del genere erano stati appena scoperti dal russo Aleksandr Fridman e dal belga Georges Lemaître.[2] Entrambi si erano resi conto che, se in base all'essenza stessa della relatività generale le proprietà

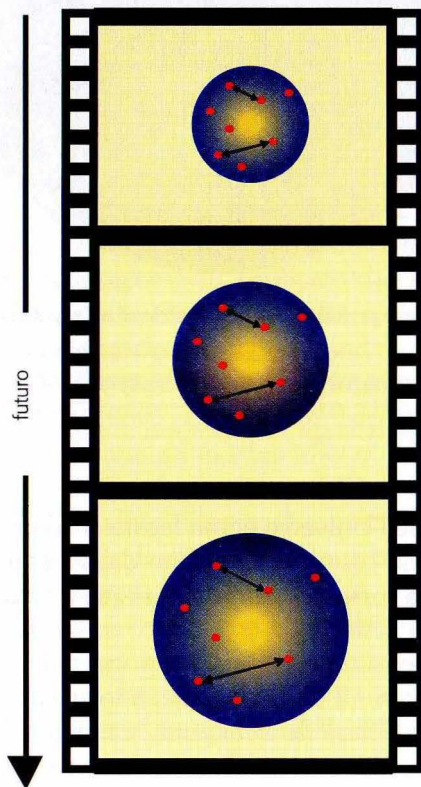
2. Per i dettagli della vicenda vedi J.-P. Luminet, *L'Invention du Big Bang*, Le Seuil, Paris 2004.

9.3 La fuga delle galassie è indizio di un'esplosione?

Osserviamo intorno a noi che le galassie si allontanano sistematicamente con velocità proporzionale alla distanza. Ciò significa che siamo al centro di una grande esplosione, come suggerisce la figura? No, poiché in virtù del principio cosmologico lo stesso tipo d'osservazione può essere fatto in ogni punto dello spazio. Lo spazio "esplode" in ciascuno dei suoi punti.

geometriche dell'Universo erano legate al suo contenuto materiale, lo spazio cosmico, modellato dalla materia, doveva allora variare nel corso del tempo, e dunque dilatarsi o contrarsi globalmente.

Nel 1927 Lemaître collegò per la prima volta modelli relativistici e osservazioni cosmologiche: è lo spazio a essere in espansione in ciascuno dei suoi punti, e non le galassie a fuggire dall'osservatore terrestre. Il tessuto elastico dello spazio, oltre a essere localmente incurvato dalla distribuzione delle masse dei corpi, si dilata nella sua globalità. Lo scarto tra due punti qualsiasi, sufficientemente distanti per sfuggire ai movimenti particolari di carattere non cosmologico, aumenta con il tempo. Immaginiamo dei microbi disposti sulla superficie di un pallone che viene gonfiato: ogni microbo potrebbe consta-

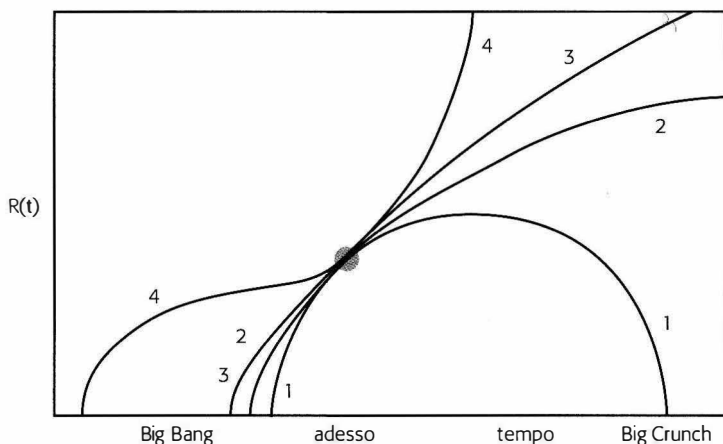
tare che i microbi vicini si allontanano da lui; avrebbe dunque l'impressione (ma solo l'impressione) d'essere al centro di un universo in cui le galassie fuggono da tutte le parti! [▶ **p. 235, L'espansione e l'infinito**]

Se le soluzioni delle equazioni relativistiche rendono conto in maniera naturale della dilatazione osservata dello spazio, resta da estrapolare l'evoluzione globale dell'Universo, nel

9.4 Il film dell'espansione

L'espansione dello spazio viene interpretata come un aumento della distanza tra due posizioni qualsiasi nello spazio (occupate, per esempio, da galassie). Queste tre istantanee dell'espansione mostrano un volume di spazio che si dilata nel corso del tempo. Il concetto di Big Bang si basa su un film del genere visto a ritroso: risalendo nel tempo, le distanze reciproche tra i punti dello spazio tendono a zero.

passato (ogni cosmologia è una cosmogonia) come nel futuro.

Per quanto concerne il passato, se proiettiamo a ritroso il film dell'espansione siamo ineluttabilmente ricondotti a un'epoca remota in cui l'Universo, che si trovava in uno stato di concentrazione e temperatura altissime, ha cominciato a espandersi. Ispirandosi a fenomeni radioattivi scoperti da trent'anni, Lemaître ha ipotizzato che, prima dell'inizio dell'espansione, la totalità della materia cosmica fosse sotto forma di un fluido nucleare ultradenso, compattato in un nucleo paragonabile ai comuni nuclei atomici, ma molto più grande, e la cui instabilità fondamentale avrebbe generato l'espansione: l'"atomo primevo". La concezione di Lemaître, riveduta e corretta dagli ulteriori progressi della fisica nucleare, ha dato origine ai famosi modelli del Big Bang. In termini matematici, il Big Bang corrisponde a una "singolarità" in cui la curvatura dello spazio diviene infinita. Estrapolazione della relatività generale, il Big Bang sfugge alle leggi della fisica conosciuta, e una migliore descrizione di questo stato singolare, che potrebbe, per esempio, essere ottenuta tramite una teoria della gravità quantistica, costituisce una delle maggiori sfide della ricerca del XXI secolo.

Per quanto concerne il futuro dell'Universo, due sono gli scenari possibili: l'espansione rallenta fortemente, dilata lo spazio finché non raggiunge un volume massimo, per lasciar posto a un movimento inverso di contrazione e di raffreddamento che culmina nel collasso finale dell'Universo: il "Big Crunch" (letteralmente, la grande strizzata); oppure, l'espansione attuale continua per sempre, diluendo e raffreddando senza posa l'Universo. Quest'ultima possibilità ne contempla in realtà due, a seconda che l'espansione rallenti senza mai arrestarsi o, al contrario, acceleri. Tutti questi scenari sono previsti dalle soluzioni di Fridman-Lemaître e dipendono dai valori di certi parametri cosmologici, quali la curvatura dello spazio e la densità totale d'energia. Avrò modo, in seguito, di esporre in maniera più dettagliata ciò che i modelli esattamente predicono e le risposte parziali offerte dalle più recenti osservazioni.

9.5 I modelli di Big Bang

I modelli cosmologici omogenei e isotropi, detti di Fridman-Lemaître, si distinguono per curvatura e dinamica. La loro caratteristica essenziale è di proporre soluzioni in cui lo spazio varia nel corso del tempo. Rappresentiamo (sull'ordinata) un fattore di scala spaziale, vale a dire una distanza tra due punti qualsiasi sufficientemente lontani tra loro, e di essi misuriamo (sull'ascissa) la separazione nel corso del tempo.
I modelli del Big Bang più promettenti sono i modelli di Fridman-Lemaître chiuso (1) e aperto (2), il modello di Einstein-de Sitter (3) – caso particolare a curvatura strettamente nulla – e il modello di Lemaître a espansione accelerata (4). Il cerchiolino in grigio rappresenta l'epoca attuale. Per determinare su quale ramo ci troviamo, e dunque per estrapolare il destino ultimo dell'universo e il suo lontano passato, dobbiamo determinare la densità e la natura dell'energia cosmica. Le misure di cui disponiamo oggi tendono a favorire il modello a espansione accelerata (4).

Da quando sono stati proposti, i modelli del Big Bang non hanno mai smesso d'essere oggetto di continue dispute tra i loro fautori e i loro detrattori. Le storiche controversie tra Einstein, il padre della relatività generale, Fridman e Lemaître, i padri del Big Bang, e Fred Hoyle, l'avversario per antonomasia della cosmologia del Big Bang, fanno la felicità degli epistemologi. Oggi vi è un consenso assai ampio circa la validità dei modelli generali del Big Bang; i disaccordi vertono piuttosto su alcune varianti: per esempio, il modello dell'inflazione (una teoria derivata dalla fisica delle particelle ad alte energie, secondo la quale, nella sua fase primitiva, lo spazio si

sarebbe gonfiato fino a raggiungere proporzioni fantastiche), l'età dell'Universo, il carattere uniforme della distribuzione delle galassie, la questione della finitezza o infinitezza dello spazio, ecc. [▶ p. 253, L'età dell'Universo] Spesso in questi appassionanti dibattiti si fa fatica a non perdere la testa. I giornalisti scientifici, i media e *a fortiori* il pubblico che li segue, raramente dispongono di tutti i dati tecnici del problema. Capita sovente che siano pubblicati articoli dai titoli sensazionali, che mettono in discussione "il" presunto modello standard del Big Bang. Ora, non solo esiste un'ampia gamma di modelli del Big Bang, che differiscono tra loro per i loro parametri, ma *nessun* dato sperimentale serio ne ha finora contraddetto lo schema di base.

Mi torna alla mente una storia della mia Provenza. Una coppia passava il tempo a litigare e regolarmente eleggeva ad arbitro il vecchio capo del villaggio, che aveva fama di saggio. Tutte le volte che il marito andava da lui per lamentarsi delle vessazioni della moglie, il capo del villaggio scuoteva la testa, e gli diceva: "Sì, hai ragione". Tutte le volte che la moglie andava da lui per lamentarsi delle vessazioni del marito, il capo del villaggio scuoteva la testa, e le diceva: "Sì, hai ragione". Un giorno, la moglie del capo del villaggio spunta dalla tenda dietro cui si era nascosta e, spazientita, esclama: "Ma che senso ha? Come puoi dare a entrambi ragione?". Il capo villaggio scuote allora la testa, e le dice: "Sì, hai ragione".

10

QUALE CURVATURA PER L'UNIVERSO?

Sogneremo fino alla fine
D'un'eccellenza del congiuntivo
Che curvasse lo spazio-tempo
Finché esso si morda la coda.

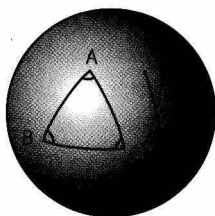
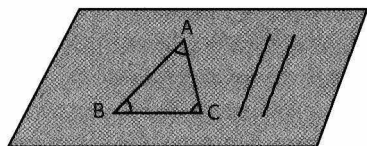
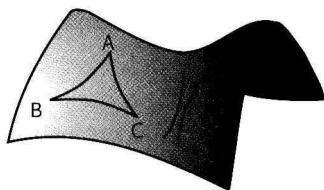
JEAN ROUSSELOT

In uno spazio qualunque la curvatura è un complicato oggetto matematico, chiamato "tensore", caratterizzato da un gran numero di componenti. A quattro dimensioni tutta l'informazione sulla curvatura dello spazio-tempo è contenuta nel cosiddetto "tensore di Ricci", il quale possiede sedici componenti e può essere rappresentato da una tabella, o matrice, di quattro righe e quattro colonne, simili alle caselle di una piccola scacchiera. Nel caso di universi omogenei e isotropi, il problema è notevolmente semplificato, poiché la curvatura dello spazio è costante. Essa viene espressa da un unico numero, di cui basta conoscere il segno.[1] I modelli di Fridman-Lemaître distinguono così tre famiglie, a curvatura rispettivamente negativa, nulla o positiva.

Per comprendere la classificazione dei modelli d'Universo mediante la loro curvatura, consideriamo, ancora una volta, il

1. Se con R indichiamo il raggio di curvatura dello spazio, la curvatura dello spazio sarà k/R^2, dove $k = -1$, 0 o +1 a seconda che la curvatura sia negativa, nulla o positiva. Nel corso del tempo R varia, mentre k no. La geometria dello spazio risulta fissata una volta per tutte dal segno della sua curvatura.

caso delle superficie, spazi a due dimensioni. La superficie più semplice è il piano, di curvatura nulla. Regna qui la geometria euclidea: per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela alla retta data (il celebre quinto postulato di Euclide); la somma degli angoli di un triangolo è sempre uguale a 180 gradi; il rapporto tra la circonferenza e il raggio di un cerchio è sempre uguale a 2π, ecc. Un'altra superficie semplice è la sfera, la cui curvatura è costante e positiva. Sulla sfera non esistono linee rette, ma i cerchi massimi (quelli il cui piano passa per il centro della sfera) svolgono lo stesso ruolo: quando ci si sposta andando dritti davanti a sé, si percorre uno di questi cerchi massimi; il cammino più breve tra due punti è sempre una porzione del cerchio massimo che passa per quei due punti. Più in generale, su una superficie qualsiasi, le curve che possiedono questa proprietà sono dette "geodetiche". Il quinto postulato di Euclide non si applica alla sfera, poiché le geodetiche hanno sempre due punti di intersezione, come i poli per i meridiani. Né ritroviamo più le altre proprietà del piano: la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi e il rapporto tra la circonferenza e il raggio di un cerchio è inferiore a 2π. La geometria a curvatura costante positiva, dunque, differisce dalla geometria euclidea. Infine, esistono superficie a curvatura costante negativa, scoperte nel 1829 dal matematico russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij. Anche in questo caso il quinto postulato di Euclide non funziona: per un punto esterno a una retta si possono tracciare infinite parallele alla retta data, la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180 gradi, ecc. Tali superficie sono difficili da visualizzare nel nostro "spazio mentale". Accontentiamoci di immaginare che, in ogni punto, esse sono identiche alla concavità di una sella da cavallo o al corno di una tromba.

Analogamente alle superficie, gli spazi tridimensionali a curvatura costante vengono classificati in tre famiglie. Oltre allo spazio "ordinario" (euclideo), di curvatura nulla, vi sono spazi a curvatura costante positiva, detti "sferici", le cui proprietà geometriche sono generalizzazioni di quelle della sfera, e spazi a curvatura costante negativa, detti "iperbolici". Nessuno di que-

10.1 Tre tipi di superficie curve

La superficie di una sfera ha una curvatura positiva, il piano una curvatura nulla, e una sella da cavallo una curvatura negativa. Sulla sfera, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi; nel piano è esattamente uguale a 180 gradi; sulla sella è minore di 180 gradi.
Gli spazi tridimensionali possono essere curvi come le superficie, ma in maniera più complicata. In linea di principio è possibile rilevare la curvatura dell'Universo misurando gli angoli formati da un gigantesco triangolo cosmico.

sti ultimi può essere visualizzato, poiché non sono contenuti in un universo euclideo: li si deve considerare non come oggetti *nello* spazio ordinario, bensì *al posto* dello spazio ordinario.

Essendo spazialmente omogenei e isotropi, i modelli di Fridman-Lemaître stabiliscono che alla scala del cosmo lo spazio fisico appartiene a una di queste tre famiglie, senza pri-

vilegiare *a priori* l'una o l'altra. D'altro canto, il segno della curvatura resta lo stesso nel corso dell'evoluzione cosmica (espansione o contrazione), anche se il raggio di curvatura varia (aumenta o diminuisce). Una delle questioni più pressanti in cosmologia è sapere in quale tipo di figura ci troviamo realmente. Si può misurare la curvatura dello spazio? Possiamo farlo direttamente, mediante un esperimento geometrico: tracciamo un enorme triangolo, determiniamo i suoi angoli e vediamo se la loro somma è maggiore di, uguale a o minore di 180 gradi; oppure, disegniamo un cerchio gigantesco, ne misuriamo circonferenza e raggio, e vediamo se il loro rapporto è maggiore di, uguale a o minore di 2π. Tuttavia, le difficoltà di una simile impresa sono notevoli. Già il matematico tedesco Karl Friedrich Gauss vi si era cimentato nella prima metà del XIX secolo, avvalendosi di un triangolo i cui lati misuravano 100 km e i cui vertici coincidevano con le vette di tre montagne; ma invano. A tale scala, le deformazioni dello spazio imputabili alla curvatura sono troppo deboli per manifestarsi. E tuttavia, devono svolgere un ruolo importante in cosmologia, al punto che gli astronomi sperano, osservando assai lontano nello spazio, di riuscire a evidenziarle. È ormai possibile sperimentare su triangoli la cui dimensione è paragonabile a quella dell'universo osservabile. [▶ **p. 215, Le geometrie non euclidee**]

Un approccio più indiretto consiste nel ricavare la curvatura dello spazio dalle equazioni della relatività generale. Queste indicano, infatti, che il segno della curvatura dipende dalla densità media di materia e di energia distribuita nello spazio, nonché da un termine chiamato "costante cosmologica". Dal punto di vista matematico, la costante cosmologica rappresenta una generalizzazione logica delle equazioni della relatività; dal punto di vista fisico, viene interpretata come un'"energia del vuoto". Essa agisce come un contributo supplementare alla densità d'energia e deve essere inclusa nelle equazioni per valutare la curvatura dello spazio. [▶ **p. 277, La repulsione cosmica**]

I modelli di Fridman-Lemaître ci dicono che, a seconda che la densità media di materia-energia sia maggiore o inferiore rispetto a un certo valore critico, la curvatura è positiva

o negativa, e nulla all'esatta frontiera. Questo valore critico, uguale a 10^{-29} g/cm^3 (a meno di un fattore che dipende dal tasso di espansione attuale dell'Universo), equivale a una forchetta compresa tra due e dieci atomi di idrogeno per metro cubo.[2] [▶ **p. 247, Il tasso d'espansione**] A titolo di esempio, il miglior vuoto ottenuto in un laboratorio odierno contiene ancora duecento miliardi di molecole d'aria per metro cubo... È dunque importante valutare il cambiamento di prospettiva. Mentre alla nostra misura umana la densità critica sembra un valore straordinariamente piccolo, alla scala cosmica essa assume un'importanza gigantesca, tanto da decidere il destino ultimo dell'Universo, dal momento che corrisponde alla soglia oltre la quale quest'ultimo finirà per essere annientato dalla propria gravità.

Per comodità, i cosmologi utilizzano il "parametro di densità", definito come il rapporto tra la densità reale (mettendo insieme tutte le possibili forme di materia e di energia) e la densità critica. A seconda che questo rapporto sia minore di, uguale a o maggiore di 1, la curvatura è negativa, nulla o positiva. Il legame tra curvatura e densità permette di accedere sperimentalmente alla geometria macroscopica dello spazio. Almeno in linea di principio, poiché, non appena cercano di fare l'inventario di tutta l'energia contenuta nell'Universo, gli astrofisici si scontrano con un certo numero di complicazioni. Non li sfiora certo l'idea di imbarcarsi nella folle impresa, evocata in innumerevoli racconti e leggende, di contare una per una le stelle; piuttosto, essi compiono un conteggio statistico degli astri visibili: galassie, ammassi di galassie, ecc. Eppure, la cosa più difficile consiste proprio nell'identificare una regione dell'Universo che costituisca un buon campione, ossia una regione la cui quantità di materia sia rappresentativa del resto. Dopo aver valutato questa massa, essi stimano che la densità di materia visibile non rappresenta che un centesimo circa della densità critica.

2. O, ancora, significa che un cubo d'universo i cui lati misurano ciascuno 10.000 chilometri pesa, in media, 10 milligrammi!

La densità di materia visibile costituisce necessariamente soltanto un limite inferiore alla densità reale. Non tutto è rilevabile dai nostri telescopi, per quanto perfezionati siano. Esiste *materia oscura*: buchi neri, piccole stelle che hanno massa inferiore a quella necessaria per accendere reazioni nucleari e che sono pertanto sotto-luminose, vaste nubi di gas interstellare formate da idrogeno freddo, particelle prodotte all'epoca del Big Bang, ecc. Disponiamo di alcuni mezzi per scoprire le tracce indirette di questa materia oscura, tramite non la sua radiazione elettromagnetica, bensì gli effetti gravitazionali che essa genera sui movimenti delle stelle e delle galassie. Più determinazioni indipendenti inducono a ritenere che la materia oscura contenuta nell'Universo sia almeno dieci volte di più di quella visibile. [► **p. 291, La materia oscura**]

Lo studio dei miraggi gravitazionali è uno dei modi che permette di rivelare indirettamente la materia oscura. Il principio è semplice: più grande è la massa totale (visibile e invisibile) della lente gravitazionale, più importanti sono le deformazioni ottiche degli oggetti situati sullo sfondo. Dall'analisi della struttura precisa di un miraggio, per esempio lo scarto angolare tra le immagini multiple, si può dunque inferire la massa della lente. Per un ammasso di galassie responsabile di un miraggio, la massa così determinata risulta sistematicamente dieci volte superiore rispetto a quella ottenuta tenendo conto unicamente delle galassie visibili. In altri termini, almeno il 90% della massa dell'Universo si trova sotto forma di materia oscura. È lo stesso rapporto che sussiste tra le parti immerse ed emerse di un iceberg alla deriva nell'Atlantico.

Fino al 1996, la maggior parte delle stime della densità dell'Universo basate su questa tecnica convergeva a un valore minimo "consensuale" del parametro di densità, compreso tra 0,1 e 0,3 (da 10 a 30% del valore critico). Ciò portava a privilegiare sperimentalmente un Universo iperbolico, a curvatura costante negativa e in continua espansione.

La situazione è bruscamente cambiata con la realizzazione di nuovi metodi per la determinazione della curvatura. Possono esservi, infatti, altri componenti della materia oscura che

non sarebbero necessariamente rilevati nei miraggi gravitazionali; particelle elementari pesanti, prodotte nel corso del Big Bang, che inonderebbero l'universo di un fondo uniforme; il contributo di una costante cosmologica non nulla, o quello di un misterioso campo di pressione negativa chiamato "quintessenza" potrebbero fare raggiungere alla densità dell'Universo un valore notevolmente più elevato. Una vera manna per i molti cosmologi che, per svariate ragioni, continuano a preferire i modelli di spazio "piatto", cioè a curvatura nulla.

Alcune delle teorie circa i primissimi istanti dell'Universo, come quella dell'inflazione, sostengono che l'Universo avrebbe conosciuto nelle prime frazioni di secondo della sua evoluzione un tasso d'espansione freneticamente elevato, al punto che al termine di questa fase di inflazione lo spazio sarebbe diventato quasi piatto, e da allora sarebbe rimasto tale. Poiché si dà praticamente per acquisito che la densità di materia, mettendo insieme tutte le sue possibili forme, rappresenti al più un terzo della densità critica, ciò significherebbe che l'energia cosmica si troverebbe essenzialmente sotto forma addizionale, forse dovuta al vuoto quantistico, dove il ruolo dinamico di tale forma d'energia oscura (costante cosmologica o quintessenza) sarebbe quello di *accelerare* l'espansione cosmica. Gruppi di ricercatori hanno osservato delle supernovae (stelle che esplodono) nelle galassie lontane e ne hanno concluso che il parametro di densità era uguale a 1, con un contributo di 0,3 per la materia-energia "ordinaria" e di 0,7 per la costante cosmologica.

Più di recente ancora, nella primavera del 2000 telescopi imbarcati su pallone, votati all'analisi di certe caratteristiche fini della radiazione fossile, hanno fornito dati che permettono (grazie ad alcune ipotesi un po' discutibili) di fissare il parametro di densità in una forchetta di valori assai stretta, i cui estremi non si discostano dal valore critico 1 di più del 15%. In altri termini, lo spazio sarebbe pressoché piatto, in espansione perpetua, e tale espansione accelererebbe nel corso del tempo.

I maggiori quotidiani di tutti i paesi, dal *New York Times* a *La Stampa*, passando per *Le Monde* e *Libération*, non hanno

mancato di trarre profitto da tali notizie. Ogni trionfalismo è lecito in questo genere d'esercizio, soprattutto quando è incoraggiato dalle clamorose dichiarazioni di qualche solone della cosmologia. Uno di questi, nel corso di una conferenza stampa tenuta al quartiere generale della NASA a Washington, non ha esitato a dire: "Questo è un momento di cui conserveremo il ricordo. Resterà segnato negli annali". Dichiarazioni del genere capitano ogni anno, con la garanzia di organismi divenuti maestri nell'arte del marketing scientifico e nella vendita dei loro programmi di ricerca. Il che ne sminuisce la portata storica...[3]

Al di là di questi annunci sensazionali, mi pare essenziale ricordare che la misura precisa della curvatura resta attualmente fuori dalla nostra portata, dal momento che ignoriamo la quantità esatta di materia oscura e la grandezza della costante cosmologica. Diffidiamo, dunque, delle pretese prove di un Universo piatto; al contrario, lo spazio ha tutte le possibilità d'essere a curvatura strettamente negativa o strettamente positiva. [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**]

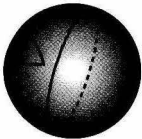
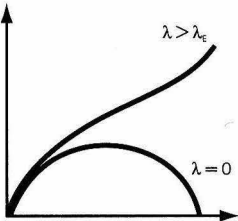
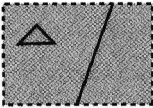
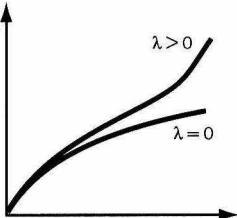
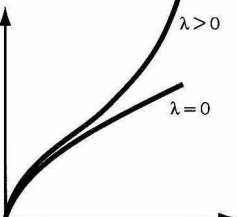
3. Tanto più che parecchie di queste dichiarazioni vengono poi smentite, come è di recente capitato nel caso delle presunte scoperte di un asse di rotazione dell'Universo, della prima immagine di un pianeta extrasolare o di un batterio fossile in un meteorite marziano. Passiamo più tempo a spiegare ai giornalisti perché tali annunci sono falsi che a divulgare i nostri lavori!

11

APERTO O CHIUSO?

> Due sono le cose infinite: l'Universo e la stupidità umana; dell'Universo, però, non sono ancora assolutamente certo.
>
> Battuta attribuita a ALBERT EINSTEIN

La domanda più immediata circa la forma globale dell'Universo riguarda il carattere finito o infinito dello spazio. Si potrebbe credere che la relatività generale vi dia risposta. Infatti, ogni spazio di curvatura positiva è di volume finito, quale che sia la sua topologia.[1] Quanto agli spazi iperbolici, di curvatura negativa, o agli spazi euclidei, di curvatura nulla, ci sembrano a prima vista infiniti, anche se non è vero che possiedono la topologia più semplice. In realtà, il carattere finito o infinito dello spazio dipende dalla sua topologia, e non soltanto dalla sua metrica. I cosmologi per lo più dimenticano la prima, limitandosi a trattare la seconda.

Tale illecita semplificazione risale alle origini stesse della relatività. All'epoca la topologia era confinata alla classificazione delle superficie, spazi a due dimensioni, e poco si conosceva circa le forme di spazi a tre dimensioni. Ecco una delle ragioni per cui la topologia cosmica non fu quasi mai discussa da nessuno, a parte qualche lodevole eccezione come Schwarzschild, Fridman e Lemaître. [► **p. 371, *Topos e cosmos***]

1. Vedi la definizione di questo termine a p. 80.

Il modello d'Universo elaborato da Albert Einstein e da Willem de Sitter nel 1932 ha furoreggiato per sessantacinque anni. Prediceva uno spazio euclideo, in continua espansione, facendo implicitamente l'ipotesi del carattere infinito dello spazio. L'oblio quasi totale dell'aspetto topologico risale a tale periodo. In seguito, gli articoli e i manuali – specialistici e non – che trattano di cosmologia hanno decretato che la struttura spaziale dell'Universo fosse o l'ipersfera finita o lo spazio euclideo infinito oppure lo spazio iperbolico infinito, senza fare alcuna menzione delle alternative topologiche. Gli astrofisici non hanno tenuto conto dei risultati raggiunti dalla matematica, a partire dagli anni Trenta del Novecento, nello studio delle forme possibili di spazi astratti. Le idee estremamente feconde della topologia sono state largamente ignorate dalla maggior parte dei cosmologi.

Tale semplificazione ha conseguenze importanti per quanto concerne il problema dell'estensione spaziale, poiché riduce il dilemma finito/infinito alla conoscenza del segno della curvatura dello spazio – nonché, nel caso in cui la costante cosmologica venga supposta essere nulla, al valore della densità di materia. Si è progressivamente prodotta una confusione circa il senso degli aggettivi "aperto" e "chiuso", usati per qualificare i modelli di Fridman-Lemaître. Incaricati originariamente di descrivere il comportamento *temporale* dei modelli (aperti, se sono in continua espansione; chiusi, se sono in espansione-contrazione), hanno finito per essere applicati anche al loro comportamento spaziale: se ci si attiene a topologie semplici e si suppone inoltre che la costante cosmologica sia nulla, i modelli in continua espansione coincidono strettamente con i modelli spazialmente infiniti, e i modelli in espansione-contrazione con i modelli spazialmente finiti.

Tuttavia, per sapere se lo spazio sia finito o infinito, non basta determinare la sua metrica o il segno della sua curvatura spaziale; né basta vedere se il parametro di densità sia maggiore di, uguale a o minore di 1: sono necessarie alcune ipotesi supplementari – appunto, quelle della topologia.

La confusione sulle parole "aperto" e "chiuso" nasce dun-

curvatura	topologia	dinamica	destino
$K > 0$ sferico	finito	$\lambda > \lambda_E$ $\lambda = 0$	aperto per λ grande chiuso
$K = 0$ euclideo	finito o infinito	$\lambda > 0$ $\lambda = 0$	aperto
$K < 0$ iperbolico	finito o infinito	$\lambda > 0$ $\lambda = 0$	aperto

11.1 Aperto o chiuso?

Contrariamente a un'opinione ampiamente diffusa, la curvatura dello spazio non detta né l'evoluzione temporale dell'Universo (salvo se la costante cosmologica è nulla), né il carattere finito o infinito dello spazio (salvo se la topologia è monoconnessa). La tabella riassume i vari casi per i modelli del Big Bang. La prima colonna indica il segno della curvatura spaziale; la seconda il carattere finito o infinito dello spazio; la terza il comportamento temporale del fattore di scala; la quarta il carattere aperto o chiuso del modello.

que dal mischiare insieme i concetti di curvatura spaziale, di dinamica temporale e di topologia. La terminologia corretta è la seguente:

– per quanto concerne la curvatura, gli universi a curvatura spaziale positiva vanno chiamati *sferici*, quelli a curvatura nulla *euclidei* (gli anglosassoni dicono *piatti*) e quelli a curvatura negativa *iperbolici*. È la quantità totale di materia e di energia che fissa il segno della curvatura;

– per quanto concerne la loro evoluzione temporale, gli universi che si contraggono vanno qualificati come *chiusi*, quelli che si dilatano sempre con una velocità asintotica nulla come *critici*, mentre quelli che si dilatano senza posa come *aperti*;

– per quanto concerne la loro topologia, gli universi la cui parte spaziale è di volume finito o infinito vanno rispettivamente qualificati come *finiti* o *infiniti*.

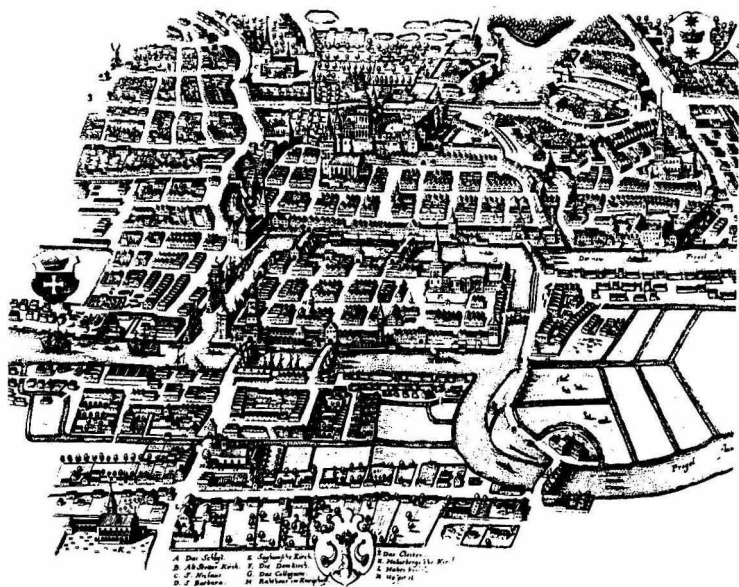
Quale che sia il gioco dei parametri cosmologici (densità di materia, costante cosmologica, scale di lunghezza topologiche), alcune combinazioni non sono possibili. Per esempio, un universo sferico può essere aperto, se la costante cosmologica è sufficientemente grande, ma mai infinito. Un universo euclideo o iperbolico è in generale aperto nel tempo, ma può essere chiuso se la costante cosmologica è negativa; che sia finito o infinito dipende essenzialmente dalla sua topologia, e non dal suo contenuto materiale.

12

CONOSCENZA DEI LUOGHI

> La matematica, al di fuori di quella nata da bisogni pratici, è per nove decimi soluzione di indovinelli.
>
> JEAN DIEUDONNÉ

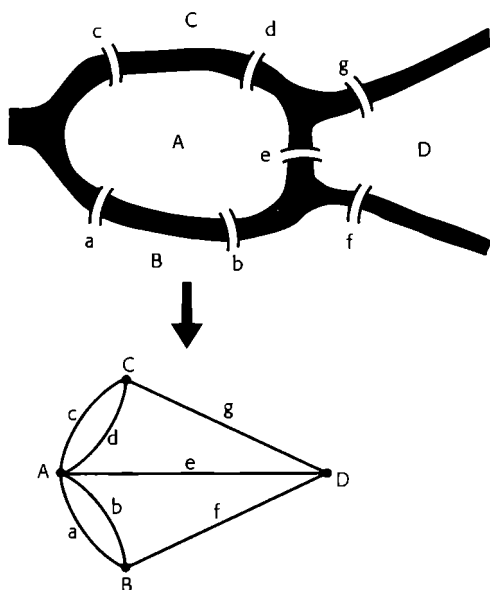
Le origini della topologia risalgono a un indovinello che erano soliti porre gli oziosi abitanti di Königsberg – cittadina portuale della Prussia orientale (annessa all'URSS nel 1945 sotto il nome di Kaliningrad, oggi fa parte della Russia), costruita intorno ai rami del fiume Pregel. L'indovinello consisteva nel sapere se, a partire da un punto qualsiasi della città, fosse possibile compiere una passeggiata seguendo un tragitto chiuso che passasse una e una sola volta per tutti i sette ponti che attraversano i rami del Pregel. L'indovinello venne risolto dal celebre matematico Leonhard Euler (Eulero), che all'epoca viveva a San Pietroburgo, non lontano da Königsberg. Nel 1736 egli pubblicò un articolo in cui erano indicate le condizioni necessarie per permettere un simile percorso, e, dal momento che la configurazione dei ponti non soddisfaceva a tali regole, dimostrò che era impossibile attraversare i sette ponti in un solo tragitto.

Eulero fece notare, per la prima volta nella storia della matematica, che si trattava di un problema di geometria che non aveva nulla a che vedere con la metrica – la procedura che consente di misurare le distanze. Contavano soltanto le posi-

12.1 Pianta di Königsberg

Questa pianta della città di Königsberg, tratta da un atlante del XVII secolo, mette in risalto il problema posto dal passaggio dei sette ponti in un solo tragitto.

zioni relative dei ponti. Infatti, se disegniamo la pianta della città su un tessuto elastico e se la deformiamo in tutte le direzioni senza bucarla, tagliarla o strapparla, la natura del problema non cambia affatto.

La soluzione dell'enigma dei ponti di Königsberg ha segnato la nascita di due nuove branche della matematica, destinate a un ricco avvenire: la topologia e la teoria dei grafi. La topologia astrae dalle distanze e tiene conto unicamente delle posizioni relative degli oggetti nello spazio. Etimologicamente, *topologia* significa "conoscenza dei luoghi". Il termine è stato proposto solo nel 1847, da Johann Listing, ed è stato ampiamente adottato solo molto dopo.[1] Quanto alla teoria dei grafi,

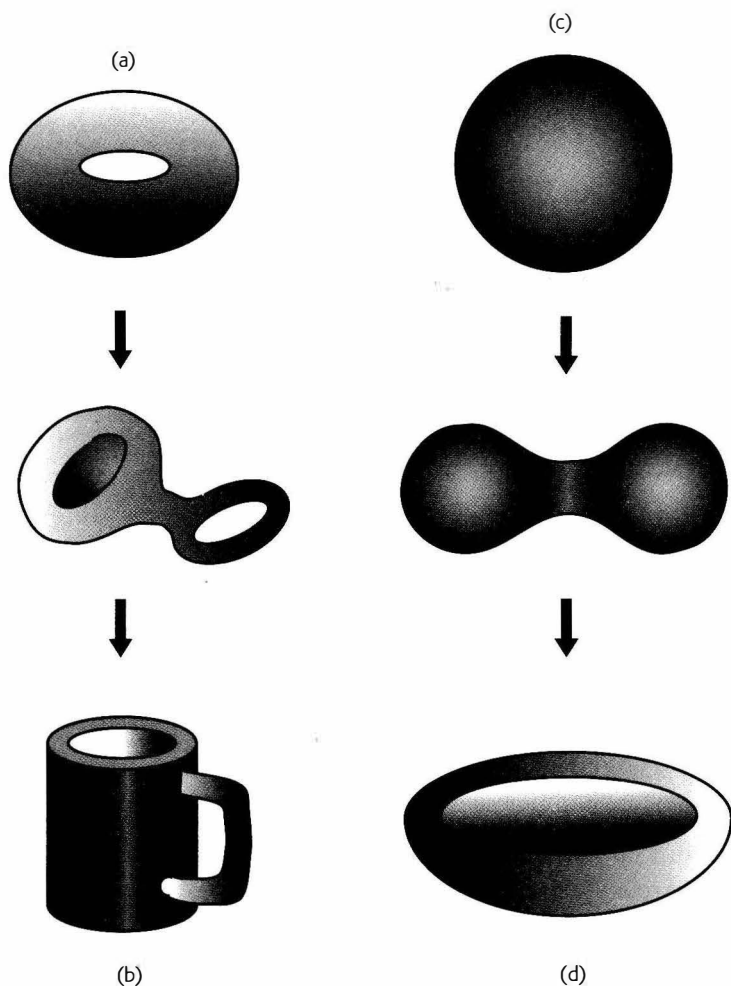
1. Vedi J. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, in *Gottinger Studien*, 1, 1847, pp. 811-875. Eulero, Gauss e Poincaré, tre grandi nomi della topologia, chia-

12.2 Grafo del problema del sette ponti

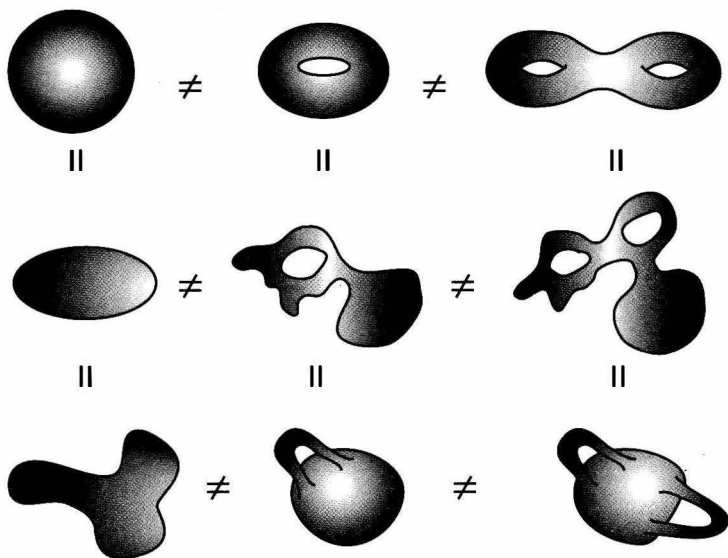
La pianta della città di Königsberg può essere schematizzata da questo grafo a quattro vertici *A*, *B*, *C*, *D* (corrispondenti alle quattro zone della città che possono servire da punto di partenza) e sette spigoli (che attraversano ciascuno dei ponti). Se si alterano le proporzioni senza modificare le posizioni relative, la natura del grafo non cambia.

capace di affrontare problemi difficilmente formalizzabili ma in cui l'intuizione, grazie al sostegno di un piccolo disegno, può rivelarsi particolarmente efficace, essa si è sviluppata soprattutto nella seconda metà del XX secolo.[2]

Come può l'indovinello dei ponti di Königsberg essere legato a una questione seria come la forma del cosmo? Il punto è che la soluzione trovata da Eulero illustra perfettamente

mavano tale disciplina *analysis situs*, ossia calcolo delle posizioni – riprendendo una locuzione introdotta da Leibniz già nel 1679. Il francese *topologie* (attestato per la prima volta nel 1876) è un termine della retorica religiosa ("studio dei luoghi comuni"). La sua accezione matematica risale all'inizio del XX secolo, grazie all'influenza del corrispondente inglese *topology*.

2. Vedi N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R. Wilson, *Graph Theory, 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford 1986.

12.3 Deformazioni continue

Immaginiamo che la superficie dell'anello (a) sia composta di caucciù e che sia possibile tenderla facilmente senza che si strappi. Deformiamo una parte della superficie per ottenere una gobba; trasformiamo poi questa gobba in una sorta di sacco di dimensione maggiore dell'anello di partenza. Quest'ultimo diventa così una tazza all'inglese, con manico (b). È invece impossibile, tramite una qualsiasi trasformazione continua, ottenere da un anello una ciotola (d). Lo si potrà fare, invece, con la superficie di una sfera (c).

12.4 Sfere e tori

Nel caso di spazi a due dimensioni, ossia di superficie, la sfera ha la stessa topologia di qualunque superficie chiusa senza buchi. I tori a uno o più buchi sono di topologia differente; possono essere deformati in maniera continua in sfere munite di manici.

i due aspetti complementari della geometria in quanto scienza dello spazio: la parte "metrica" tratta delle proprietà della distanza, mentre la parte "topologica" studia le proprietà globali, senza far intervenire alcuna misura. Le proprietà topologiche sono quelle che restano insensibili alle deformazioni, posto che tali deformazioni siano continue: a patto che non sia tagliato, forato o incollato, lo spazio può essere tirato, schiacciato o manipolato in tutti i sensi, senza che cambi la sua topologia: per esempio, che sia finito o infinito, che abbia o meno buchi e, se ne ha, il numero dei suoi buchi, ecc. Non è difficile capire che se deformazioni continue possono spostare i buchi di una superficie, non possono però crearli o eliminarli.

Per un topologo non vi è alcuna differenza tra un pallone da calcio e uno da rugby. Peggio: un anello e una tazza di tè

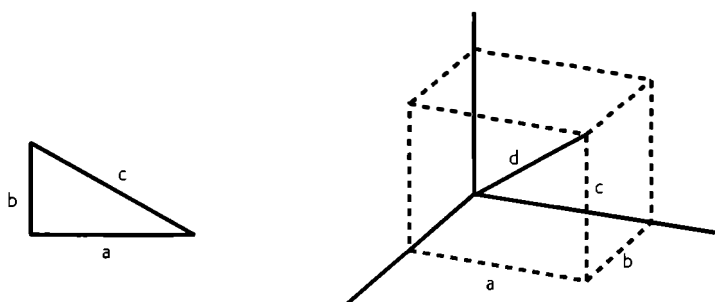
non sono che un solo e medesimo oggetto, caratterizzato da un orifizio attraverso cui può passare il dito (anche se un britannico inorridirebbe all'idea di versare del tè in un anello!). Di contro, una tazza e una ciotola, che permettono entrambe di bere, sono radicalmente differenti dal punto di vista topologico, poiché la ciotola non ha manico.

13

DAL CILINDRO ALLA CIAMBELLA

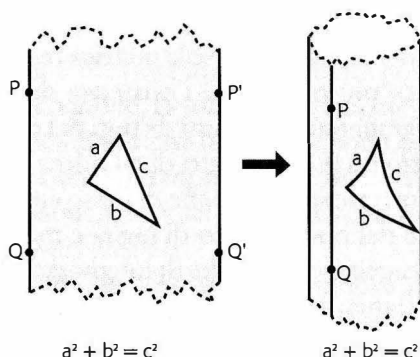
> Il cammino più breve da un punto a un altro è la linea retta, a patto che i due punti siano l'uno di fronte all'altro.
>
> PIERRE DAC

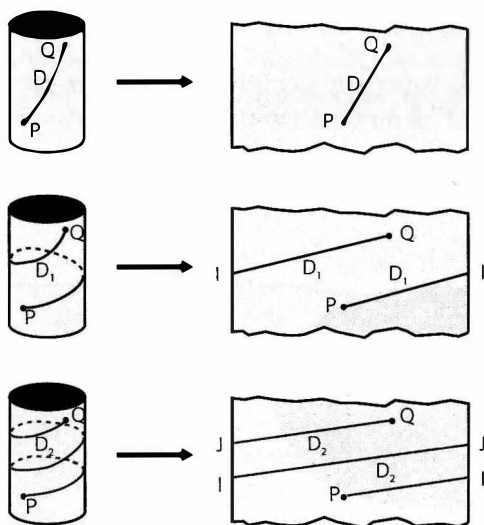
La topologia riserva non poche sorprese. Consideriamo il piano euclideo: è un foglio infinito a due dimensioni, che viene spesso visualizzato nello spazio a tre dimensioni, benché non abbia bisogno di tale immersione per essere perfettamente definito in maniera intrinseca, ossia senza alcuno spazio di riferimento esterno. La geometria locale del piano è determinata dalla sua metrica, cioè dal modo di misurare le lunghezze. Si tratta qui semplicemente di applicare il teorema di Pitagora per un sistema di due coordinate ortogonali ricoprente il piano: il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati (cateti). È una misura locale che non dice nulla circa il carattere finito o infinito dello spazio.

Cambiamo topologia. Ritagliamo nel piano una banda di lunghezza infinita in una direzione e di larghezza finita nell'altra. Incolliamo poi i due bordi della banda: otteniamo così un cilindro, un tubo di lunghezza infinita. In questa operazione la metrica non è cambiata: il teorema di Pitagora continua ad applicarsi alla superficie del cilindro. La curvatura "intrinseca" del cilindro è dunque nulla. Ciò può sembrare sorprendente, poiché si ha l'impressione che vi sia "in qual-

13.1 Teorema di Pitagora

Nel piano la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è data dal teorema di Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$. La formula può essere generalizzata agli spazi euclidei di dimensionalità superiore. Per esempio, la diagonale di un parallelepipedo è data da $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

che senso" una curvatura non nulla, il cui raggio sarebbe il raggio del cilindro. Ma questo "qualche senso" mette in gioco uno spazio esterno al cilindro, quello in cui lo visualizziamo. In tal senso, il cilindro ha una curvatura detta "estrinseca". Tuttavia, un essere piatto, una sorta di paramecio-geometra che vivesse sulla superficie del cilindro, non avrebbe accesso né a questo spazio esterno di dimensionalità superiore, né alla curvatura estrinseca del cilindro. Legato al suo spazio bidimensionale potrebbe fare tutti i controlli necessari (misura della somma degli angoli di un triangolo, rapporto tra la circonferenza e il raggio di un cerchio), ma non scoprirebbe alcuno scarto rispetto alla metrica euclidea del piano. Il cilindro è detto *localmente* euclideo.

Ciononostante, il cilindro differisce dal piano per più di un aspetto. Certo, la sua area è infinita, come quella del piano, ma possiede una circonferenza finita nella direzione perpendicolare al suo asse di rotazione. In altri termini, il cilindro è anisotropo: non tutte le sue direzioni sono equivalenti; se ci si muove lungo una retta parallela all'asse, ci si allontana all'infinito, mentre se ci si sposta nella direzione perpendicolare, si torna al punto di partenza. Nell'operazione di costruzione del cilindro a partire da una porzione di piano sono cambiate alcune

13.2 Costruzione del cilindro

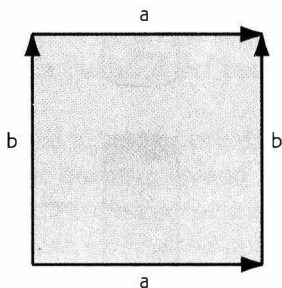
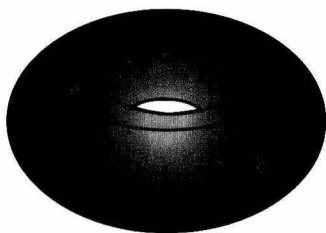
Dopo aver ritagliato nel piano una banda di carta, se ne incollino i bordi opposti – il che equivale a identificare i punti *P* e *P'*, *Q* e *Q'*. La superficie risultante è un cilindro. Essa sembra possedere una certa curvatura. In realtà, il cilindro è piatto: se si traccia su tale superficie un triangolo rettangolo, il teorema di Pitagora resta perfettamente valido.

13.3 Le rette del cilindro

Le rette del cilindro sono le eliche di passo costante. Due punti qualsiasi *P* e *Q* sono legati da un'infinità di eliche *D* che compiono 0, 1, 2,... giri del cilindro. Se si sviluppa il cilindro sul piano, tutte queste eliche si svolgono sotto forma di rette.

proprietà globali; il cilindro ha dunque una topologia differente da quella del piano, anche se la metrica resta la stessa. La sua caratteristica più notevole è l'esistenza di un'infinità di "rette" che congiungono due punti distinti del cilindro: quelle che hanno effettuato 0, 1, 2,... giri di cilindro. Viste in tre dimensioni, queste rette sono le eliche di passo costante.

Continuiamo nel nostro gioco di taglia e incolla. Prendiamo un tubo in caucciù estensibile, di lunghezza finita, e incolliamo fianco a fianco le sue due estremità. È esattamente lo stesso se partiamo da un rettangolo e ne incolliamo a due a due i lati opposti. Otteniamo un toro, ossia una superficie che ha la forma di un anello o di una camera d'aria.

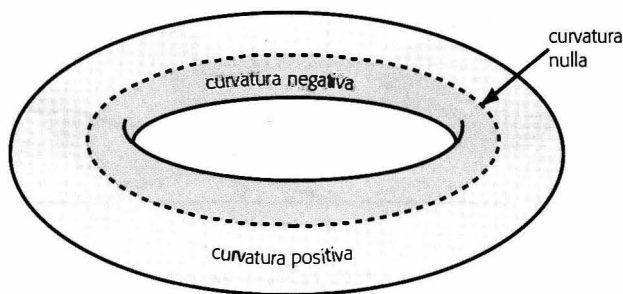
Una nuova difficoltà ci attende. Una vera camera d'aria, al pari del tubo, può materializzarsi nell'usuale spazio a tre dimensioni; essa ha una curvatura estrinseca. Ma, contrariamente al tubo, la camera d'aria ha anche una curvatura intrinseca non nulla, che varia a seconda delle regioni: ora è positiva, ora è negativa.

Tuttavia, la superficie del toro ottenuta per identificazione dei lati opposti di un rettangolo ha una curvatura intrinseca *ovunque* nulla. Questo "toro piatto", superficie le cui proprietà globali sono identiche a quelle di un anello ma la cui curvatura

13.4 Costruzione del toro piatto

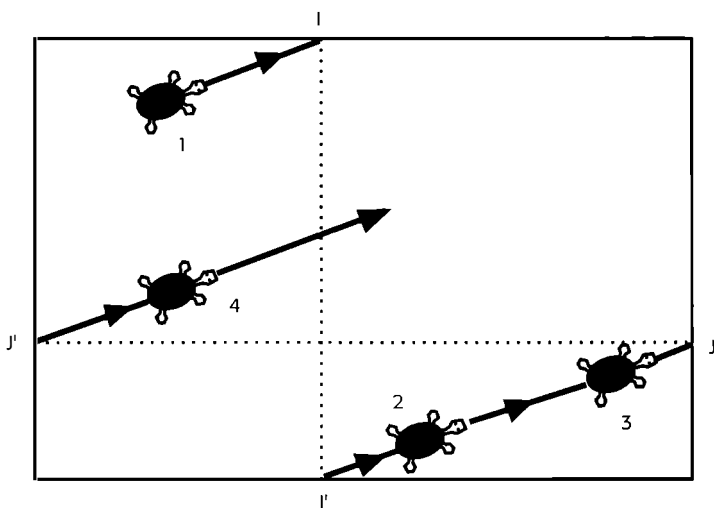
Dal punto di vista topologico, un toro piatto è ottenuto incollando i lati opposti di un rettangolo. Viceversa, se si taglia il toro a sinistra seguendo le due linee *a* e *b*, si può sviluppare la figura risultante secondo la forma del rettangolo a destra.

è ovunque nulla, non può essere visto nel nostro usuale spazio a tre dimensioni. Né tutte le sue proprietà possono essere descritte senza eccezione; la sua area è finita, nel senso che è impossibile allontanarsi a una distanza infinita da un dato punto di partenza; e non è isotropo, poiché due delle sue direzioni, chiamate direzioni principali, un cerchio minimo e un cerchio massimo, sono privilegiate.

Immaginiamo una creatura che si muova su un toro, viaggiando dritta lungo una direzione principale; con il suo punto di partenza comunica con dei raggi luminosi, di modo che può calcolare la distanza percorsa; a un certo momento, questa distanza raggiunge un massimo, dopo di che comincia a diminuire; completato il giro, la creatura torna al punto di partenza. Ne inferisce di vivere in uno spazio di estensione finita. Tuttavia, ogni volta che ha misurato nel suo intorno la somma degli angoli di un triangolo, ha sempre trovato che essa è pari a 180 gradi, sicché ne conclude pure di vivere in un piano euclideo. La metrica (geometria locale) del toro piatto resta data dal teorema di Pitagora, proprio come nel caso del piano e del cilindro.

Così, semplicemente ritagliando e incollando una porzione di piano, abbiamo definito due superficie, il cilindro e il

13.5 Le curvature del toro

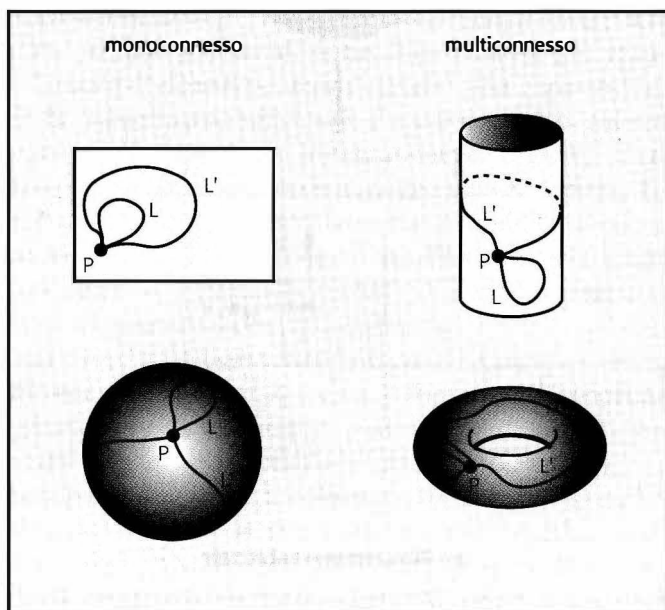
La superficie di una camera d'aria non è un toro piatto. Possiede una curvatura variabile a seconda delle regioni.

toro, che dal punto di vista topologico sono differenti dal piano, ma che appartengono tutte alla medesima famiglia di spazi a curvatura nulla: le superficie localmente euclidee. I matematici hanno individuato un mezzo elegante per caratterizzare queste differenti topologie: la chiusura di cappi. Un cappio è una curva chiusa tracciata su una superficie. Sul piano infinito, da cui abbiamo preso le mosse, possiamo disegnare in un qualsiasi punto un cappio qualsiasi, di grandezza qualunque; questo cappio potrebbe essere sempre ristretto e ridotto a un punto senza incontrare ostacoli. I topologi definiscono una tale superficie "monoconnessa". Di contro, il tubo o l'anello non hanno questa proprietà. Certo, esistono cappi che possono essere completamente ristretti, come nel piano; ma ve ne sono alcuni per cui ciò non è possibile: un cerchio che fa il giro del tubo o che si arrotola in-

13.6 Passeggiata su un toro

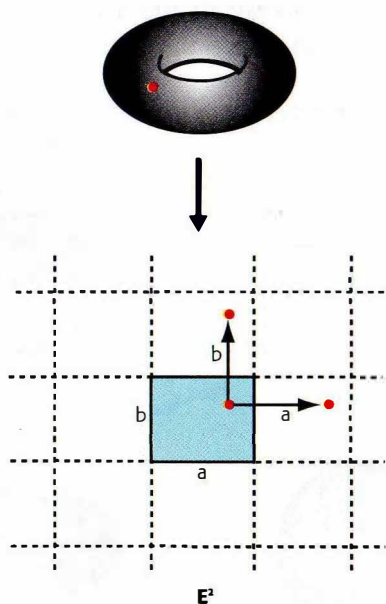
Come nei giochi *arcade* in cui i personaggi che escono da un lato rientrano dall'altro, la tartaruga attraversa il lato superiore del rettangolo in *I*, riappare nel lato inferiore, al punto equivalente *I'*, prosegue il suo cammino in linea retta, raggiunge il lato destro in *J*, riappare in *J'*, e così via. Il toro è dunque equivalente a un rettangolo i cui bordi opposti sono identificati a due a due.

torno all'anello, per esempio, non può essere ridotto in maniera continua a un punto. Le superficie, in cui i cappi non possono essere ristretti indefinitamente poiché fanno il giro di un buco, hanno una topologia detta "multiconnessa". La multiconnessità appare allorché, in uno spazio monoconnesso, si effettuano delle incollature, ossia delle *identificazioni* di punti.

Le proprietà di monoconnessità o di multiconnessità sono fondamentali in topologia, e si applicano a qualunque tipo di spazio, indipendentemente dalla sua curvatura e dal numero delle sue dimensioni.

In genere, riusciamo facilmente a visualizzare gli spazi a due dimensioni poiché possiamo immergerli mentalmente

13.7 Cappi e connessità

Sul piano o su una sfera tutti i cappi possono essere indefinitamente ristretti senza ostacoli. Questi spazi sono monoconnessi. Su un cilindro o su un toro alcuni cappi possono essere ristretti, altri no. Questi spazi sono multiconnessi.

nello spazio euclideo.[1] Per gli spazi a tre dimensioni dobbiamo fare appello a una rappresentazione più astratta, che mi accingo brevemente a descrivere, cominciando, per ragioni di semplicità, da un esempio bidimensionale. Nel XIX secolo i matematici hanno scoperto che è possibile rappresentare qualsiasi superficie tramite un poligono di cui si identifichino a due a due certi lati. Abbiamo visto che incollando due bordi opposti di un quadrato si ottiene una porzione di cilindro, e che se si uniscono le due estremità di quest'ultima si fabbrica un toro.

13.8 Ricoprimento universale

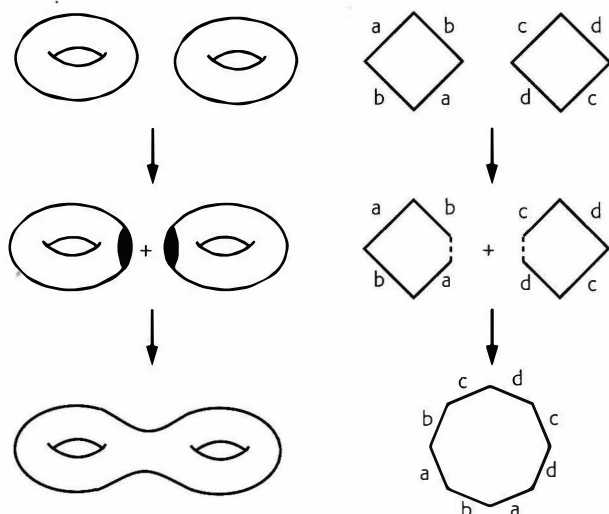
Il toro ha per dominio fondamentale un rettangolo e per olonomie traslazioni di lunghezze uguali ai lati del rettangolo. Facendo agire le olonomie su ciascun punto del dominio fondamentale, e ripetendo man mano il procedimento, si genera lo spazio di ricoprimento universale – in questo caso, il piano euclideo $\mathbf{E}^2$.

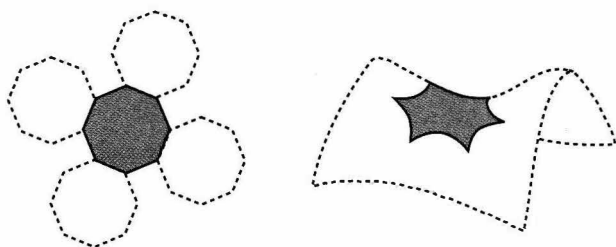
1. Nella maggior parte dei casi, anche se non sempre, come si è visto per il toro piatto.

Il quadrato (o il rettangolo) munito delle due identificazioni dei suoi bordi opposti (alto e basso, destra e sinistra) è chiamato "dominio fondamentale"; esso caratterizza, in particolare, un certo aspetto della topologia del toro. Ciò non basta; bisogna anche specificare le trasformazioni geometriche che identificano i punti. Infatti, a partire da un quadrato, si potrebbero identificare i punti diametralmente opposti rispetto al centro di simmetria del quadrato, e la superficie ottenuta non avrebbe più nulla di un toro; non sarebbe euclidea, ma sferica, ed è chiamata "piano proiettivo". Le trasformazioni matematiche che identificano i punti formano un gruppo di simmetrie, detto "gruppo di olonomia".

A partire dal dominio fondamentale e facendo agire le trasformazioni del gruppo di olonomia su ciascun punto si creano indefinitamente repliche del dominio fondamentale; si realizza una sorta di pavimentazione di uno spazio più grande, detto "spazio di ricoprimento universale". Per costruzione, lo spazio di ricoprimento universale è monoconnesso, nel senso che ogni cappio può essere indefinitamente ristretto. Il ricoprimento universale del toro è il piano euclideo infinito $\mathbf{E}^2$, e ciò traduce il fatto che il toro piatto è una superficie localmente euclidea. Se lo si taglia lungo il cerchio minimo e lungo il cerchio massimo, e quindi lo si sviluppa, lo si trasforma in una porzione di piano euclideo: un rettangolo.

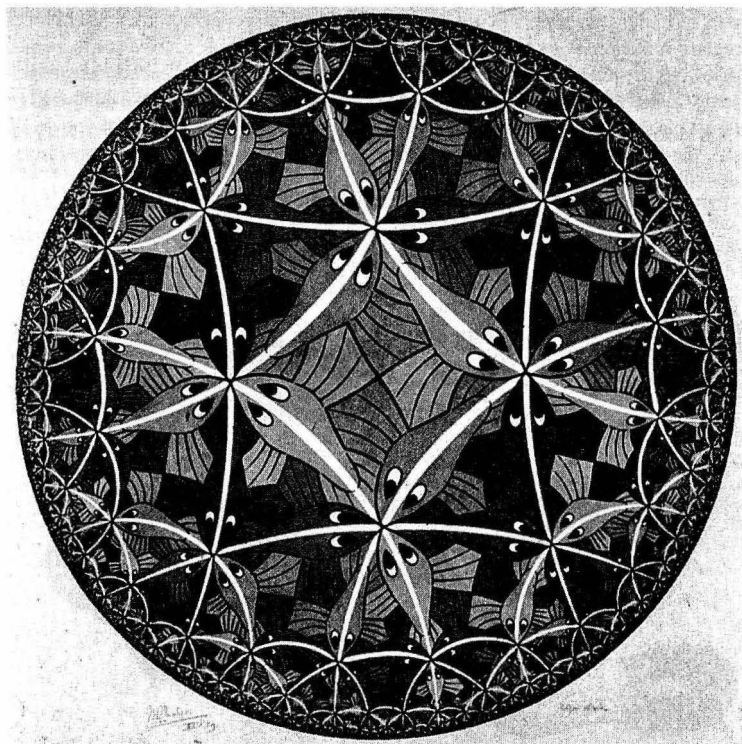
È nelle loro topologie monoconnesse che gli spazi assumono la forma più semplice, la forma sviluppata del ricoprimento universale; quest'ultimo può essere piegato in molti modi, dove ogni piegamento genera una forma multiconnessa.

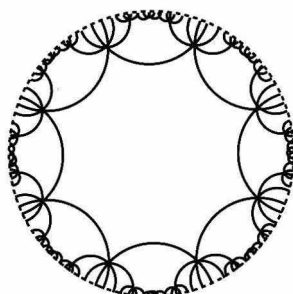
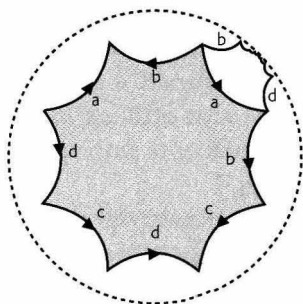
Prendiamo due tori e incolliamoli come nella figura 13.9. Per quanto concerne le sue proprietà topologiche, questo "doppio toro" può essere rappresentato da un poligono a otto lati, detto ottagono, e ciò appare intuitivamente comprensibile dal momento che ciascun toro era rappresentato da un quadrilatero. Ma questa superficie, lo si vede subito, non può servire per pavimentare il piano euclideo, per un evidente problema d'angolo: se si vuole costruire un ottagono su ciascuno dei suoi lati, gli otto ottagoni si accavalleranno (figura 13.10).

13.9 Somma connessa di tori

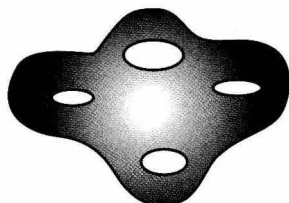
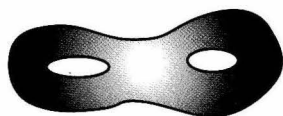
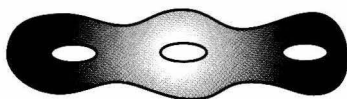
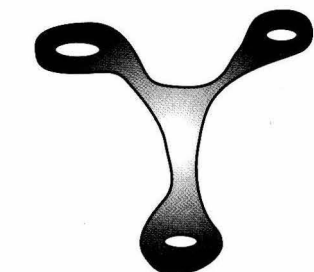
Colonna a sinistra: a ciascuno dei due tori si toglie un disco e se ne incollano i bordi per formare un doppio toro.
Colonna a destra: la stessa operazione a partire dai domini fondamentali. Il doppio toro è ben rappresentato da un ottagono i cui lati sono stati identificati a due a due e in una data maniera.

13.10 Pavimentazione del piano iperbolico con ottagoni

È impossibile pavimentare il piano euclideo con ottagoni: ciò implica che il doppio toro non sia una superficie euclidea. Di contro, il piano iperbolico può essere pavimentato da ottagoni ritagliati sull'incavo di una sella. Il piano iperbolico è lo spazio di ricoprimento universale del doppio toro. Gli otto vertici dell'ottagono devono essere tutti identificati in un unico punto; è per questa ragione che bisogna utilizzare un ottagono di curvatura negativa con angoli di 45 gradi ($8 \times 45 = 360$), invece di un ottagono piatto con angoli di 135 gradi.

Bisogna pertanto incurvare i lati e assottigliare gli angoli, ossia passare in uno spazio iperbolico: solo qui è possibile disporre otto ottagoni intorno all'ottagono centrale, e a partire da ognuno dei nuovi ottagoni costruirne altri otto, *ad infinitum*. Tramite questo procedimento si pavimenta uno spazio infinito: il piano iperbolico di Lobačevskij.

Un'affascinante rappresentazione di un mosaico iperbolico è stata data da Jules-Henri Poincaré. Un'opportuna trasformazione di coordinate consente di ricondurre l'infinito a distanze finite, di modo che lo spazio di Lobačevskij sia intera-

13.11 Limite circolare

In questa xilografia del 1959, dal titolo *Limite circolare III*, Escher ha utilizzato la rappresentazione di Poincaré per pavimentare il piano iperbolico con pesci.

13.12 La rappresentazione di Poincaré del piano iperbolico

Facendo agire le olonomie su ogni punto dell'ottagono fondamentale, e ripetendo via via il procedimento, si genera una pavimentazione del piano iperbolico tramite ottagoni regolari e identici. Poincaré ha dimostrato che il piano iperbolico, solitamente infinito, poteva essere interamente rappresentato all'interno di un disco – la cui frontiera rappresenta l'infinito. Il modello di Poincaré altera distanze e forme, e ciò spiega perché gli ottagoni paiano irregolari e sempre più piccoli man mano che ci si avvicina al bordo del disco. Tutte le linee rappresentate sono rette del piano iperbolico, e sono perpendicolari alla frontiera.

13.13 Le ciambelle iperboliche

Tutte le superficie chiuse aventi più di un buco sono spazi a curvatura negativa, muniti di una geometria iperbolica.

mente contenuto all'interno di un disco. Il celebre incisore olandese Maurits Cornelis Escher ha realizzato una serie di opere intitolate *Limite circolare*, nelle quali ha utilizzato la rappresentazione di Poincaré (vedi figure 13.11 e 13.12).

Più un generale, un toro a n buchi è una collazione di n tori. Dal punto di vista topologico è equivalente alla somma di n quadrati i cui lati opposti sono stati identificati, e tale somma è a sua volta topologicamente equivalente a un poligono di $4n$ lati giudiziosamente identificati a due a due. Più gli angoli sono da aggiustare, più li si deve rendere appuntiti; dunque, più si deve ingrandire la superficie. L'n-toro ($n \geq 2$) è pertanto una superficie a curvatura negativa. Superficie di questo tipo le troviamo comunemente dal panettiere, sotto forma di ciambelle. Le chiameremo "ciambelle iperboliche".

Le ciambelle possono essere tutte munite di metriche a curvatura costante negativa. Hanno tutte la stessa geometria locale, di tipo iperbolico. Non possiedono, però, la medesima topologia, dal momento che questa dipende dal numero dei buchi.

14

FORME AFFASCINANTI

> Quanto abbiamo appreso è simile a un pugno di terra; quanto ci resta da apprendere assomiglia al mondo intero.
>
> AWAIYAR

Ricapitoliamo: la forma di uno spazio è interamente specificata se ne sono indicati un dominio fondamentale, un gruppo di simmetrie particolari, le olonomie, che identificano a due a due i bordi del dominio, e uno spazio di ricoprimento universale formato dalla pavimentazione dei domini fondamentali. La classificazione delle forme, dunque, si riduce, in parte, alla classificazione delle simmetrie. [▶ **p. 337, La simmetria**]

Ricorriamo a tale ricetta per catalogare l'insieme delle superficie omogenee, ossia gli spazi a due dimensioni senza bordi né punti angolosi.[1] Per quanto concerne la curvatura, le superficie omogenee sono di tre tipi: le superficie sferiche, di curvatura positiva (come la superficie di un pallone da rugby), le superficie euclidee, di curvatura nulla (la cui geometria piana è quella che abbiamo appreso sui banchi di scuola), e le superficie iperboliche, di curvatura negativa (come certe parti di una sella di cavallo o di un corno di tromba).

Entro ciascuno di questi tipi di superficie, i matematici hanno classificato tutte le topologie (qui ridotte al senso di

1. Si eliminano così i dischi, che hanno un bordo, e i coni, che hanno un punto angoloso.

"forme") possibili. Per definizione, gli spazi di una stessa classe possono essere derivati gli uni dagli altri per deformazione continua. [▶ **p. 355, Classificazione delle superficie**]

Vi sono soltanto due forme di superficie sferiche, tutte e due finite: la sfera, che può essere declinata in una quantità d'aspetti metrici differenti a seconda degli stiramenti continui che le si può far subire, e il piano proiettivo. La sfera è monoconnessa, il piano proiettivo no. Quest'ultima superficie è delicata da concepire; la cosa più semplice è passare per il tramite del suo dominio fondamentale – un disco –, i cui punti diametralmente opposti sono identificati.

Le superficie euclidee assumono cinque forme possibili: il piano, ovviamente, che è il prototipo monoconnesso, ma anche il cilindro, il nastro di Möbius, il toro e l'otre di Klein, tutte multiconesse. Le prime tre sono infinite, le altre due finite. Queste superficie, concettualmente semplici, non sono tutte facilmente visualizzabili; per esempio, l'otre di Klein, benché sia senza curvatura, è chiusa su se stessa e non ha né dritto né rovescio; vale a dire, non è "orientabile".

Infine, le superficie iperboliche, a curvatura negativa, hanno un numero infinito di topologie. Solo una di queste, equivalente al piano di Lobačevskij, è monoconnessa. Tutte le altre sono multiconnesse, e sono caratterizzate dal numero dei buchi. Abbiamo visto, per esempio, che la superficie di una ciambella è iperbolica.

Da questa classificazione possiamo trarre una prima conclusione, e cioè che, nell'insieme infinito delle superficie omogenee, tutte sono iperboliche, a eccezione di sette!

Tali costruzioni possono essere generalizzate a spazi matematici a tre dimensioni. La classificazione topologica delle superficie fu ultimata alla fine del XIX secolo; quella degli spazi di dimensione superiore è, però, molto più complicata, quand'anche ci si limiti ai casi particolari di spazi tridimensionali a curvatura costante – quelli prevalentemente impiegati in cosmologia. Ciononostante, per tutto il XX secolo i matematici hanno scoperto forme affascinanti, note in prati-

ca solo a loro, che possono essere utilizzate dai fisici per la descrizione dell'Universo reale.

Non diversamente dalle superficie, gli spazi tridimensionali a curvatura costante possono essere dapprima classificati, in base al segno della loro curvatura, in famiglie sferiche, euclidee e iperboliche. Si tratta poi di censire le forme topologiche all'interno di ciascuna di queste famiglie. Gli strumenti di base che consentono di definire e di analizzare le loro proprietà sono ancora il dominio fondamentale, il gruppo di olonomia e lo spazio di ricoprimento universale. [▶ p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali]

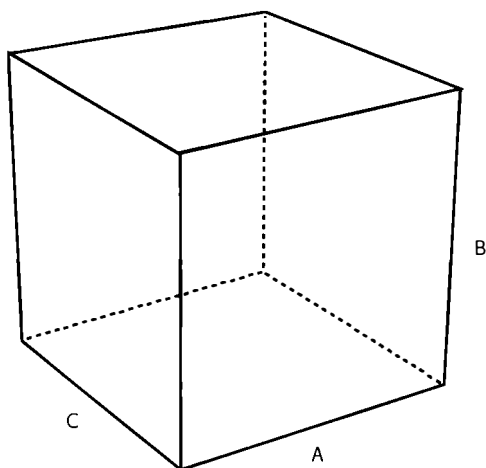
In tre dimensioni il dominio fondamentale non è più un poligono, bensì un poliedro. Si tratta di una figura costruita tramite l'assemblaggio di facce poligonali, i cui lati comuni formano gli spigoli del poliedro e i cui punti comuni formano i vertici. La maggior parte degli spazi tridimensionali è rappresentabile sotto forma di poliedri convessi le cui facce sono state convenientemente identificate, e così anche tutti i vertici. [▶ p. 349, I poliedri]

Esistono diciotto forme di spazi euclidei a tre dimensioni. La più semplice è quella dello spazio ordinario, indicato con $\mathbf{E}^3$. Movendo da questo spazio infinito, monoconnesso, è possibile, tramite procedure analoghe a quelle utilizzate per le superficie, costruire cilindri, tori tridimensionali, e persino varianti più complicate. Insisto sul fatto che, in ognuno di questi nuovi spazi, valgono tutte le proprietà enunciate da Euclide; in particolare, due rette parallele non si incontrano, e vale il teorema di Pitagora.

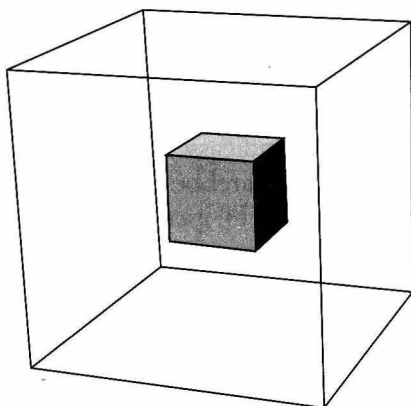
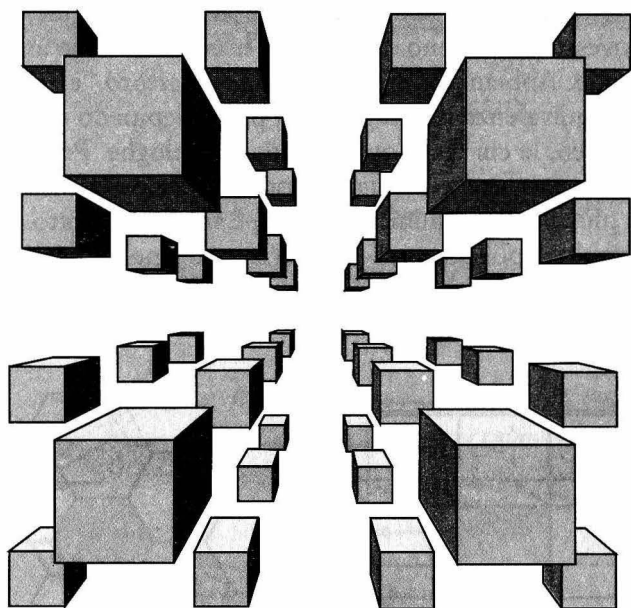
Come a due dimensioni avevamo ottenuto il toro piatto incollando i lati opposti di un rettangolo, così a tre dimensioni formeremo un "ipertoro" identificando le facce opposte di un parallelepipedo. Se viaggiamo dritti davanti a noi in questo parallelepipedo, appena ne usciamo da una faccia ne rientriamo immediatamente da quella omologa. Il poliedro fondamentale dell'ipertoro è dunque un parallelepipedo rettangolo. Le trasformazioni che identificano ciascuna faccia alla sua faccia omologa sono le olonomie caratteristiche di

questa topologia: traslazioni di lunghezze uguali agli spigoli del parallelepipedo.

Immaginiamo di essere immersi in un tale spazio e supponiamo inoltre d'essere luminosi come lucciole. La luce che emettiamo dalla schiena attraversa la faccia del parallelepipedo che si trova dietro di noi, e riappare dalla faccia davanti a noi che le è equivalente: guardando avanti, vediamo la nostra schiena. Analogamente, guardando a destra possiamo osservare il nostro profilo sinistro, e alzando la testa possiamo vedere sotto i nostri piedi. Dal momento che la luce si propaga in tutte le direzioni, il nostro corpo si dà a vedere sotto tutte le sue angolature in un'infinità di immagini, disposte secondo un reticolo di parallelepipedi che, estendendosi in ogni verso, ricostituisce uno spazio visivo infinito (vedi figura 14.2).

Tra le diciotto forme differenti di spazi euclidei tridimensionali otto sono di volume infinito e dieci di volume finito. Sei di queste ultime dieci sono orientabili. Il loro poliedro fondamentale può avere la forma di un parallelepipedo o quella di un pri-

14.1 Dal toro all'ipertoro

Se le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo fondamentale sono A, B, C, il volume dell'ipertoro ottenuto identificando le facce opposte è finito, ed è uguale a $A \times B \times C$.

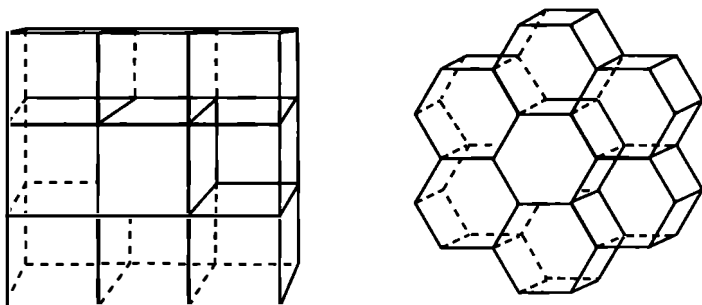
14.2a

14.2b

14.2 Moltiplicazione di immagini in un ipertoro

14.2a Piazziamo entro il parallelepipedo fondamentale, che rappresenta un ipertoro, un piccolo cubo le cui sei facce sono colorate in maniera differente.
14.2b Quando le facce opposte del parallelepipedo sono identificate per formare l'ipertoro, la moltiplicazione delle immagini che ne risulta fa vedere il piccolo cubo in esemplari multipli, orientati però in modo diverso.

sma esagonale. In entrambi i casi, la loro ripetizione genera una pavimentazione dello spazio di ricoprimento universale $\mathbf{E}^3$.

La figura 14.4 precisa la struttura di questi sei spazi, e il loro interesse cosmologico è ben evidente. Se, infatti, le teorie e le osservazioni cosmologiche indicassero che la curvatura dello spazio è in media nulla, non vi sarebbe alcun motivo per escludere *a priori* che lo spazio fisico sia un ipertoro o una delle sue varianti.

Tuttavia, non vi è ragione particolare perché la curvatura dello spazio sia *strettamente* nulla. E lo stesso problema topologico investe gli spazi non euclidei con curvatura diversa da zero. In ciascuno di questi casi il modello di spazio abitualmente considerato (monoconnesso) non è il solo che può essere preso in esame; si deve tener conto anche delle sue varianti multiconnesse.

Queste ultime sono rappresentabili tramite un poliedro convesso più o meno complicato, le cui facce sono associate a coppie. Abbiamo appena visto che l'ipertoro "è" (nel senso dell'equivalenza topologica) un parallelepipedo dello spazio euclideo, le cui facce opposte sono omologhe. Proprio come per le superficie a due dimensioni, lo spazio euclideo non basta più allorché il numero di facce è superiore a otto. Bisogna costruire il poliedro nello spazio sferico o nello spazio iperbolico, e gonfiarlo o sgonfiarlo, finché tutti gli angoli si aggiustino esattamente intorno a un punto unico (vedi figura 14.5).

14.3 Due pavimentazioni dello spazio euclideo

A tre dimensioni, lo spazio euclideo ordinario può essere pavimentato regolarmente con parallelepipedi rettangoli o prismi esagonali.

14.4 Sei piccoli spazi euclidei

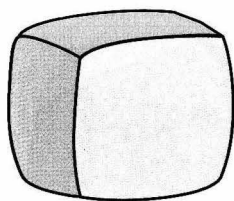
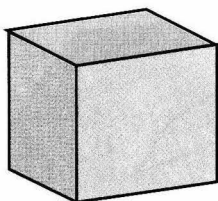
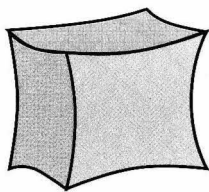
Identificando in un modo opportuno (colonna destra) le facce di un parallelepipedo o di un prisma esagonale, otteniamo i sei spazi euclidei finiti e orientabili. Nel caso del più semplice, l'ipertoro $\mathbf{T}^3$, l'identificazione è fatta per mere traslazioni. Negli altri casi certe coppie di facce sono ruotate di un 1/6 di angolo giro, di un 1/4 di angolo giro, ecc., prima d'essere incollate.

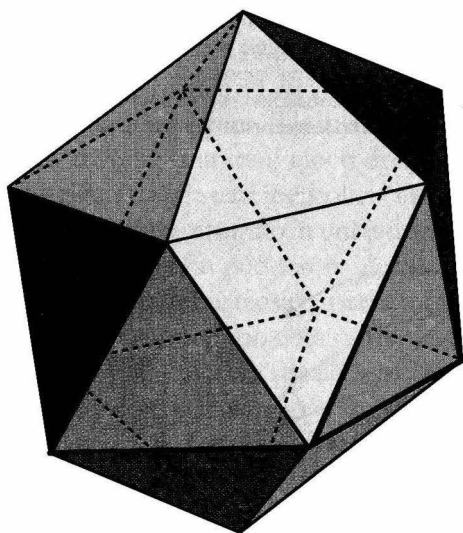
I loro volumi possono essere finiti o infiniti. Non vi è che una sola legge: *tutte le topologie sferiche (spazi a curvatura positiva) sono di volume finito*.

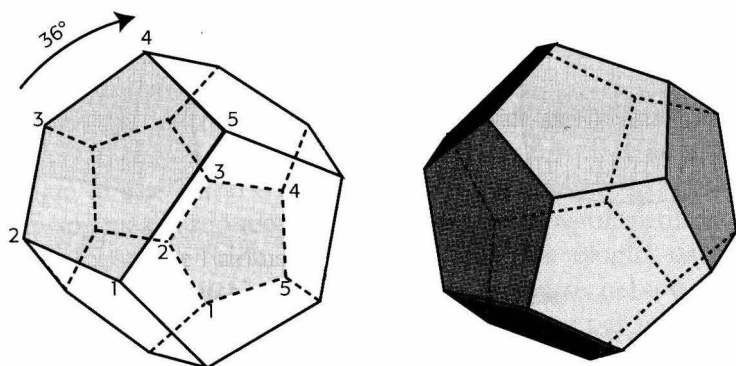
Esiste un'infinità di spazi sferici, i quali, però, sono tutti censiti. Il prototipo (e il più voluminoso tra loro, per un dato raggio di curvatura) è l'ipersfera. Si tratta del famoso spazio chiuso senza bordo scoperto da Riemann, e in seguito utilizzato da Einstein e Fridman nei loro modelli cosmologici, datati rispettivamente 1917 e 1922. Di contro, Lemaître, nel suo modello del 1931 con costante cosmologica – che per la prima volta introduce l'idea che poi condurrà al Big Bang –, preferirà la topologia dello spazio proiettivo (che chiamerà "spazio ellittico"), ottenuta a partire dall'ipersfera identificando tutte le coppie di punti diametralmente opposti.

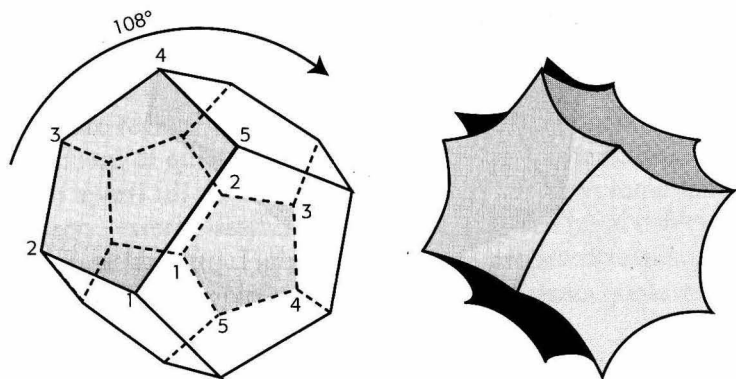
Ma gli spazi più affascinanti sono gli spazi iperbolici. Come già nel caso delle superficie, essi sono infinitamente più numerosi degli altri. I matematici non sono riusciti a classificarli tutti, anche se ne conoscono un'infinità d'esempi. Uno dei più interessanti è rappresentabile tramite uno dei cinque poliedri regolari, l'icosaedro, in cui siano in un certo qual modo identificate tutte le facce triangolari a due a due; lo spazio interno, finito, di curvatura negativa, è chiamato "spazio di Best". Vi è poi lo spazio di Seifert-Weber, formato a partire da un altro poliedro regolare, il dodecaedro, a facce pentagonali.

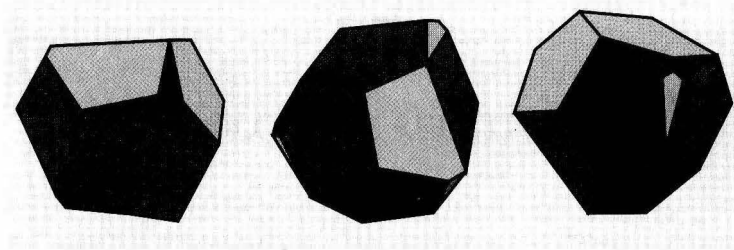
Alcuni di questi spazi sono chiusi (di volume finito), altri sono aperti (di volume infinito). Solo quelli di volume finito possono essere classificati – anche se sono ben lungi dall'essere conosciuti tutti. Parecchie delle loro proprietà restano misteriose. Per esempio, non sappiamo con certezza quale tra loro sia il più piccolo.

Vedremo come il problema generale del volume dello spazio sia di grandissimo interesse per le applicazioni alla cosmologia. Uno spazio euclideo può avere qualsiasi volume, grande o piccolo che sia. Il volume di uno spazio sferico, invece, non può andare oltre $2\pi^2R^3$, dove R è il raggio di curvatura. Questo limite superiore non è che il volume dell'ordinaria ipersfera, la quale è monoconnessa e rappresenta dunque il maggiore

14.5 Poliedri euclidei, sferici e iperbolici

In uno spazio sferico (a) i poliedri hanno angoli maggiori che in uno spazio euclideo (b), mentre in uno spazio iperbolico (c) hanno angoli minori.

14.6 Lo spazio iperbolico chiuso di Best

Spazi finiti a tre dimensioni e a curvatura negativa possono essere costruiti rimpiazzando il poligono a due dimensioni della figura 13.10 con un poliedro a tre dimensioni. La codificazione dei colori mostra quali facce del poliedro debbano essere incollate insieme. Se i coni del poliedro sono assemblati correttamente, lo spazio definito dal poliedro incollato deve rappresentare uno spazio iperbolico e non uno spazio euclideo. Quello sopra raffigurato, lo spazio di Best, ha per poliedro fondamentale un icosaedro.

14.7 Lo spazio sferico di Poincaré

Se ciascuna faccia di un dodecaedro è incollata alla sua faccia opposta dopo aver subito una rotazione di 36° (un decimo di angolo giro), lo spazio risultante è lo spazio sferico di Poincaré, variante multiconnessa dell'ipersfera, il cui volume è però 120 volte più piccolo. L'incollamento può essere realizzato solo se si utilizza un dodecaedro incurvato positivamente, i cui angoli sono leggermente "gonfiati" a 120°, invece dei 117° del dodecaedro euclideo.

14.8 Lo spazio dodecaedrico di Seifert-Weber

Se ciascuna faccia di un dodecaedro (a sinistra) è incollata alla faccia opposta dopo aver subito una rotazione di 108° (tre decimi di angolo giro), lo spazio risultante è lo spazio iperbolico di Seifert-Weber, variante multiconnessa dell'iperboloide $\mathbf{H}^3$, il cui volume è però finito. Come per l'ottagono della figura 13.10, l'incollamento può essere realizzato soltanto se si utilizza un dodecaedro a curvatura negativa, con angoli di 72° (a destra).

14.9 Il più piccolo spazio iperbolico

Questo spazio iperbolico chiuso, scoperto da Jeffrey Weeks, ha per dominio fondamentale un poliedro irregolare – di cui qui mostriamo tre vedute differenti – a 26 vertici e 18 facce (12 pentagoni e 6 quadrilateri), convenientemente identificati mediante complicate trasformazioni. Tra tutti gli spazi iperbolici noti è quello che ha il volume minore.

spazio sferico possibile. Tutti gli altri spazi sferici, multiconnessi e in numero infinito, hanno un volume pari a una frazione intera di quello dell'ipersfera. Il loro volume può essere diminuito quanto si vuole tramite il gioco delle identificazioni.

Per quel che riguarda gli spazi iperbolici chiusi, ogni topologia ha un volume specifico misurato in unità del raggio di curvatura *R*; e si sa che questo non può essere piccolo a piacere. Nel 1966 è stato calcolato un limite teorico, pari a 0,166 R^3, anche se non è stato costruito alcuno spazio dotato effettivamente di questo volume. Finora, il più piccolo spazio iperbolico conosciuto (di cui cioè si sono potuti calcolare interamente il poliedro fondamentale e il gruppo di olonomia) è stato scoperto nel 1985 dall'americano Jeffrey Weeks. Il suo volume è di 0, 94272 R^3.

I matematici lavorano alacremente su tali questioni, anche se pochi sono quelli tra loro che hanno piena consapevolezza dell'immenso interesse che queste ricerche rivestono per la cosmologia. Comunque, Weeks ha messo a disposizione degli specialisti, su Internet, un catalogo di spazi iperbolici chiusi chiamato *SnapPea.* Questo programma classifica tutti gli spazi noti per volume crescente e ne indica le proprietà: struttura del poliedro fondamentale, natura delle trasformazioni del gruppo di olonomia, lunghezze topologiche caratteristiche, ecc.

15

TOPOLOGIA E RELATIVITÀ

> La memoria dello spazio esploso conserva un po' dello scenario del tempo.
>
> MAURICE COUQUIAUD

La relatività generale ha superato con successo un certo numero di controlli sperimentali; ma, come tutte le teorie fisiche, è incompleta. Uno dei suoi limiti di validità è noto: essa non tiene conto delle proprietà microscopiche della materia descritte dalla fisica quantistica. Einstein ne era pienamente consapevole: dopo aver messo a punto nel 1916 la sua teoria della gravità, passò il resto dei suoi giorni a cercare di unificare la gravitazione con le altre interazioni fisiche – invano. Gli attuali tentativi di unificazione – si tratti di "superstringhe", di "supergravità" o di "cosmologia quantistica" – vanno incontro alle stesse difficoltà.

Meno noto, però, è che la relatività generale è incompleta anche a grande scala: lo spazio è finito o infinito, orientato o meno? Qual è la sua forma globale? La gravitazione non decide da sola della forma dello spazio. Gli esempi precedenti ci hanno mostrato che la curvatura dello spazio non permette necessariamente di trarre conclusioni circa il suo carattere finito o infinito. Gli spazi finiti sono, nella maggior parte dei casi, varietà topologiche che ammettono una geometria iperbolica. Le questioni essenziali della cosmologia cui prima alludevo dipendono dalla topologia globale dell'Universo; di fronte

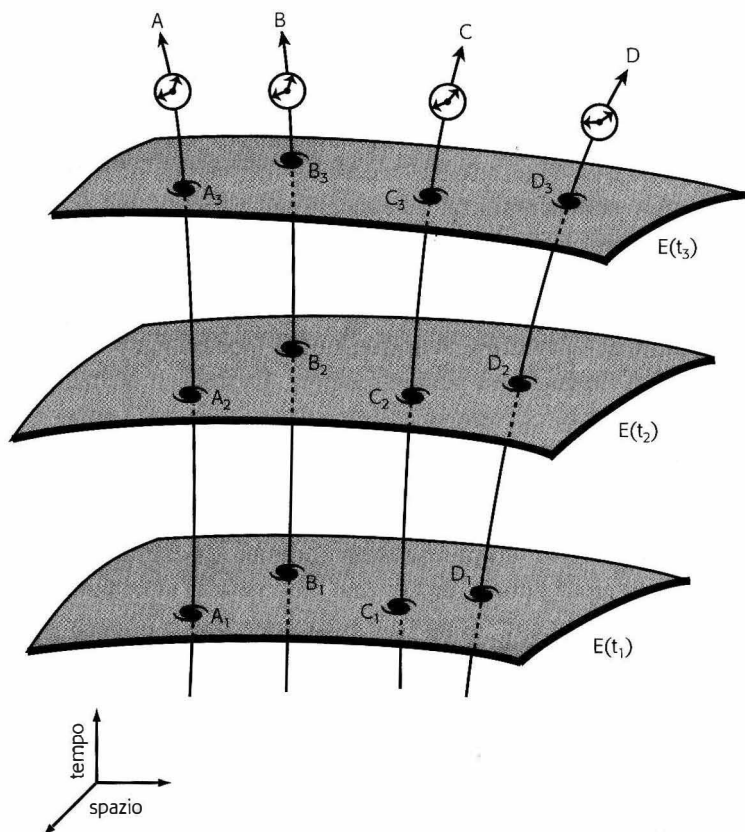
a quest'ultima la relatività generale si rivela impotente. La teoria di Einstein consente di trattare soltanto proprietà geometriche locali dell'Universo. Le sue equazioni alle derivate parziali hanno per soluzione un "tensore metrico" o, in maniera equivalente, l'elemento di distanza infinitesimale che separa due eventi dello spazio-tempo. Lo studio dell'Universo, del suo contenuto e delle sue proprietà fisiche è ricondotto a problemi di geometria pseudoriemanniana. A un elemento metrico dato corrispondono più, se non infinite, topologie; e dunque modelli d'Universo possibili. Per esempio, l'ipertoro e il familiare spazio euclideo sono localmente identici, e pure la relatività li descrive tramite le medesime equazioni, anche se il primo è finito mentre il secondo è infinito. Analogamente, le equazioni di un Universo di curvatura negativa non fanno differenza tra uno spazio finito e uno infinito.

I modelli del Big Bang hanno spazi di tipo sferico, euclideo o iperbolico, a seconda che la loro curvatura sia positiva, nulla, negativa. Di solito, si suppone che la loro topologia spaziale sia identica a quelle degli spazi prototipi: ipersfera, spazio euclideo, iperboloide, dove il primo è finito, mentre gli altri due sono infiniti. Non vi è, però, alcuna ragione perché lo spazio abbia una topologia monoconnessa. In ogni caso, la relatività generale non dice nulla al riguardo; è soltanto l'applicazione stretta del principio cosmologico, in aggiunta alla teoria, che induce a generalizzare le proprietà osservate localmente alla totalità dell'Universo. La formica in mezzo al deserto è convinta che il mondo intero sia composto di granelli di sabbia...

Le topologie multiconnesse arricchiscono notevolmente (e al contempo complicano) il campo della modellizzazione cosmologica. Grazie a esse diventa possibile considerare modelli d'Universo in cui lo spazio sia finito indipendentemente dalla sua curvatura, anche se la densità di materia e la costante cosmologica sono basse. E sempre grazie a questa matematica così sofisticata torna alla ribalta l'idea cara a Platone e a Keplero: usare i poliedri per spiegare la segreta architettura del mondo! [► **p. 349, I poliedri**]

Giunti a questo punto, è opportuno ricordare che i modelli cosmologici non si riducono a spazi tridimensionali, ma sono degli spazio-tempo a quattro dimensioni. Al problema della topologia dello spazio si aggiunge così quello della topologia del tempo. Che cosa possiamo dire della topologia dell'Universo come spazio-tempo? La modellizzazione si trova di fronte un ventaglio infinito di possibilità. Tuttavia, considerazioni sommarie sulle proprietà fisiche dell'Universo consentono di scartare rapidamente un buon numero di topologie inammissibili. Vediamo il perché. I modelli del Big Bang sono omogenei (cioè la loro parte spaziale ha una curvatura ovunque uniforme) e in espansione. Queste due proprietà permettono di distinguere senza ambiguità le sezioni di spazio simultaneo e l'asse del tempo cosmico. Possiamo pertanto descrivere lo spazio-tempo come il prodotto matematico tra uno spazio riemanniano a tre dimensioni e l'asse temporale.

Tale foliazione semplifica notevolmente le cose. Il tempo è rappresentato da uno spazio a una dimensione i cui punti sono gli istanti: un solo numero è sufficiente a determinare una data. Il tempo possiede una struttura d'ordine: su una retta, un punto si situa necessariamente prima o dopo un altro. (Si noti che ciò non sarebbe possibile, se il tempo avesse più dimensioni.) La topologia del tempo è infine molto povera; contrariamente a quella dello spazio multidimensionale, non offre che due varianti: la linea e il cerchio. Queste due forme corrispondono a due grandi concezioni filosofiche, quella del tempo lineare e quella del tempo ciclico. Quest'ultima ha dominato a lungo nei miti (si pensi a quello dell'Eterno Ritorno[1]), ma è stata abbandonata dalla fisica contemporanea perché viola il principio di causalità, in base al quale la causa precede sempre l'effetto. Pertanto, è vietata qualsiasi identificazione di punti lungo l'asse temporale. Certo, nel quadro dei modelli cosmologici in espansione-contrazione si potrebbe pensare di iden-

1. Vedi al riguardo M. Eliade, *Il mito dell'eterno ritorno*, tr. it. Rusconi, Milano 1975.

15.1 Foliazione cosmica

Nei modelli cosmologici di Fridman-Lemaître lo spazio-tempo ammette una foliazione particolare la quale consente di distinguere senza ambiguità le sezioni spaziali tridimensionali $E(t)$ (che hanno una curvatura costante) e le linee di tempo unidimensionali A, B, C, ecc. (che permettono di attribuire una data universale agli eventi della storia cosmica). Se è lecito identificare i punti dello spazio $E(t)$ al fine di renderlo multiconnesso, è vietato identificare i punti lungo le linee di tempo – e ciò per preservare il principio di causalità.

tificare il Big Bang con il Big Crunch, ossia l'inizio e la fine del tempo; ma tale operazione è illecita, dal momento che questi punti sono singolarità che non appartengono a loro volta all'Universo.

La questione della topologia cosmica si riduce principalmente a quella della parte spaziale dell'Universo. Come abbiamo visto, per ogni tipo di curvatura possibile si danno varianti dei modelli del Big Bang dalle topologie multiconnesse. La maggior parte delle forme di spazio a tre dimensioni precedentemente citate può essere applicata alla descrizione dello spazio fisico.

16

PICCOLI UNIVERSI BIZZARRI

> Ahimè! Per trarne una goccia d'ebbrezza,
> Strizzerai l'Universo.
>
> VICTOR HUGO

Stanco di definizioni astratte su poliedri fondamentali, spazi di ricoprimento universale e gruppi di olonomia, il lettore appassionato di cosmologia avrà forse perso la pazienza nel corso dei capitoli precedenti. Ma i suoi sforzi sono ora premiati. Penetrando nel campo della topologia cosmica scopriremo come quelle nozioni matematiche svolgano un ruolo fondamentale nei differenti modi di descrivere l'Universo quale noi osserviamo e l'Universo quale realmente è.

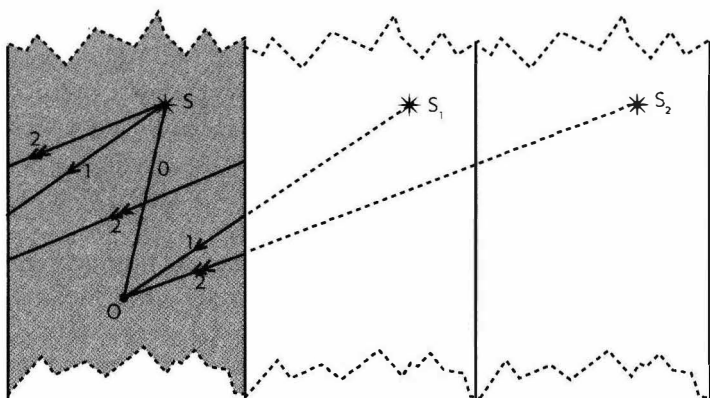
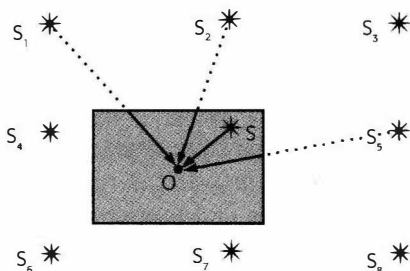
Viviamo in un mondo di apparenze, nell'accezione letterale del termine. Come possiamo percepire la forma dello spazio se non osservando gli astri e seguendo i tragitti dei loro raggi luminosi che compongono la trama del tessuto cosmico? In uno spazio monoconnesso, tra un osservatore e una sorgente di luce, esiste un unico tragitto possibile – un'unica geodetica dello spazio-tempo. Al telescopio, una galassia è vista in un unico esemplare in una direzione e a una distanza date. Non vi è alcuna ambiguità. Ma che cosa accade in uno spazio multiconnesso? Immaginiamo d'essere sulla superficie di un cilindro, dove le linee rette (le geodetiche) sono le eliche che connettono l'osservatore e la sorgente luminosa. Questi tragitti e-

licoidali sono in numero infinito, a seconda che compiano uno, due, tre, ecc. giri del cilindro. Avremo un'infinità di raggi luminosi emessi da una sorgente, i quali, pur essendo tutti partiti in linea retta, giungeranno a noi in un'infinità di direzioni, dandoci l'illusione di altrettante sorgenti differenti.

Lo stesso accade in uno spazio tridimensionale, e ben si comprende la straordinaria illusione ottica che può essere generata da uno spazio multiconnesso, il quale possieda una topologia complicata che ne ripieghi la grandezza a una scala inferiore al raggio dell'orizzonte cosmologico (la distanza percorsa dalla luce dalla sua emissione quattordici miliardi di anni fa, dell'ordine di cinquanta miliardi di anni luce[1]).

La figura 16.1 mostra che, se lo spazio reale possiede una topologia multiconnessa, si avrà *sempre l'illusione di vivere nello spazio di ricoprimento universale*, ossia nella versione dispiegata dello spazio reale.

I modelli d'Universo che io chiamo *chiffonné*, spiegazzato, sono quelli la cui parte spaziale è multiconnessa e la cui grandezza, almeno in una direzione data, è inferiore a quella dell'universo osservabile. L'aggettivo *chiffonné* mi è stato suggerito da un matematico di Tolosa che aveva preso parte nel 1994 a uno dei miei primi seminari sull'argomento. Esso possiede una certa risonanza poetica; non sempre, però, incontra il favore dei miei colleghi, i quali mi fanno notare che, spiegazzando un foglio di carta, si creano dei punti angolosi, degli spigoli, delle piegature che ne alterano la regolarità. Ora, non vi è nulla di tutto ciò nell'universo multiconnesso: lo spazio è topologicamente spiegazzato senza per questo possedere spigoli o cunei. Suggerirei di pensare, piuttosto, a una stoffa flessibile che può essere spiegazzata a piacere senza creare false pieghe. Vi è un'altra obiezione che può essere rivolta contro l'uso del termine: il cilindro e il toro, i due prototipi più semplici di superficie multiconnesse, non paiono affatto spiegaz-

1. Il lettore non si sorprenda di queste cifre: "La luce non va più veloce della luce", ma, per la rapida espansione dell'Universo, percorre in x miliardi di anni distanze superiori a x miliardi di anni luce.

16.1 L'illusione del ricoprimento universale

(a) Nel caso del cilindro lo spazio reale è l'interno della banda grigia i cui bordi sono identificati. I raggi luminosi emessi dalla sorgente *S* giungerebbero all'osservatore *O* seguendo più tragitti, corrispondentemente alle volte compiute intorno al cilindro. L'osservatore *O* ha dunque l'illusione di vedere più sorgenti distinte S, S_1, S_2, ecc., allineate entro uno spazio fittizio costituito dalla giustapposizione di bande indefinitamente ripetute – lo spazio del rivestimento universale del cilindro.
(b) Nel caso del toro lo spazio reale è l'interno del rettangolo grigio i cui bordi opposti sono identificati. L'osservatore *O* vede i raggi luminosi della sorgente *S* giungergli da più direzioni. Ha l'illusione di vedere sorgenti distinte S_1, S_2, S_3, ecc. disposte secondo una distribuzione regolare che ricopre un piano infinito.

zati. Ma pensiamo, invece, a uno spazio tridimensionale multiconnesso, il cui dominio fondamentale sia un poliedro che possiede numerose facce, ciascuna delle quali deve essere, tramite operazioni matematiche complesse, identificata a un'altra. In tal caso, ci si può rappresentare mentalmente l'interno alquanto bizzarro di questo poliedro così piegato come uno spazio "*chiffonné*".

Terzo esperimento mentale: usciamo in una notte chiara e contempliamo le stelle. Scegliamone alcune: Altair nella costellazione dell'Aquila, Deneb in quella del Cigno, Spica in quella della Virgo (Vergine), e una decina d'altre meno luminose. Immaginiamo ora che questi astri luminosi siano *un solo e medesimo punto* dello spazio, visto in direzioni differenti. Ripetiamo la stessa operazione mentale, selezionando una dozzina di altre stelle e riconducendole a una sola entità, e così via. In totale, avremo ridotto il migliaio di astri visibili a un centinaio di punti distinti. È perciò necessario che lo spazio che contiene le stelle sia, in una certa maniera, "spiegazzato". Come avremo modo di vedere, non intendiamo dire che lo spazio cosmico sia spiegazzato anche a piccole dimensioni, al punto che le stelle visibili a occhio nudo, distanti tutte da noi meno di mille anni luce, si mostrerebbero in più esemplari. Tuttavia, se si rimpiazzano le stelle con galassie lontane, il nostro esperimento mentale è pienamente giustificato.

In uno spazio spiegazzato le traiettorie dei raggi luminosi emessi da una qualsiasi sorgente di luce cosmica imboccano una gran quantità di cammini per giungere a noi, ciascuno dei quali segue le pieghe dello *chiffon*. Da ogni astro, un osservatore percepisce una moltitudine di *immagini fantasma*. Così, quando vediamo miliardi di galassie riempire uno spazio che riteniamo privo di pieghe e assai vasto, potrebbe trattarsi di un'illusione: questi miliardi di immagini di galassie potrebbero essere generati da un numero inferiore d'oggetti, presenti in uno spazio spiegazzato di dimensione minore. Quest'ultimo crea l'*illusione dell'infinito*.

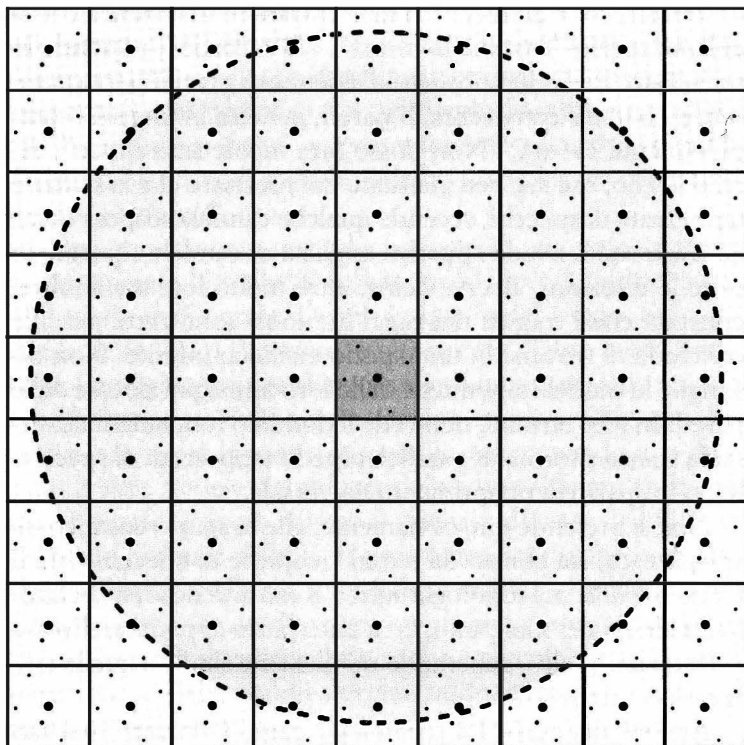
La metafora della casa degli specchi delineata all'inizio di *questo volume* trova ora il suo pieno significato. Dio convoca

un astrofisico, e gli dice: "Ti farò entrare in una stanza che si chiama spazio. Trovane la forma". "D'accordo", risponde lo scienziato. Posto in uno stato d'assenza di gravità per non essere a contatto con eventuali pareti, penetra in una sala completamente oscura. "Non posso fare niente senza luce", dichiara. Dio, che si è ben guardato dal precisare che la stanza è tappezzata di specchi, accende qualche candela sospesa qua e là. L'astronomo vede apparire migliaia di candele ripartite in tutte le direzioni, alcune vicine, altre molto lontane; inoltre, constata che i tragitti dei raggi luminosi sono rettilinei. Ne conclude di trovarsi in uno spazio euclideo infinito. Non distingue le candele autentiche dalle loro immagini riflesse dalle pareti. In altri termini, non vede il dominio fondamentale, ossia la stanza a forma di parallelepipedo tappezzata di specchi, bensì lo spazio di ricoprimento universale.

Non si pretende qui, ovviamente, che lo spazio cosmico, se spiegazzato, sia chiuso da pareti ricoperte di specchi! Ma il modo in cui la sua topologia agisce, a causa delle identificazioni tra alcuni dei suoi punti, crea uno spazio apparente diverso dallo spazio reale – generando un'illusione simile a quella della casa degli specchi.[2]

Attenzione, però! La cosmologia tratta l'Universo nel suo insieme, e non lo descrive come uno spazio soltanto, ma come uno spazio-tempo, modellato dalla materia e dall'energia. Un "piccolo Universo spiegazzato", dunque, è un modello cosmologico che appartiene alla famiglia di soluzioni delle equazioni della relatività generale scoperte da Fridman e da Lemaître, ma la cui parte spaziale è multiconnessa, di volume finito (benché la curvatura possa essere negativa o nulla), eventualmente più piccolo del volume dell'universo osservato.[3]

2. Con una differenza notevole, però, per quanto concerne l'orientazione delle immagini: in uno specchio il vostro riflesso vi sta di fronte, mentre in un ipertoro vi girerà dietro.

3. Questa restrizione del volume finito può essere eliminata. Uno spazio spiegazzato è chiuso in una direzione spaziale (come il cilindro), non necessariamente in tutte. Ciò che importa per la mia tesi è che esso generi immagini fantasma. Un tunnel infinitamente lungo tappezzato di specchi non moltiplicherà anch'esso le immagini all'infinito?

16.2 L'illusione dell'infinito

Nella pratica, orizzonti spazio-temporali limitano la vista dell'osservatore, di modo che egli non percepisce che una porzione limitata del rivestimento universale. In questo spazio a forma di toro (quadrato blu), l'universo osservabile è delimitato da un orizzonte circolare (puntini rossi), che contiene solo un numero finito di repliche della cellula fondamentale.

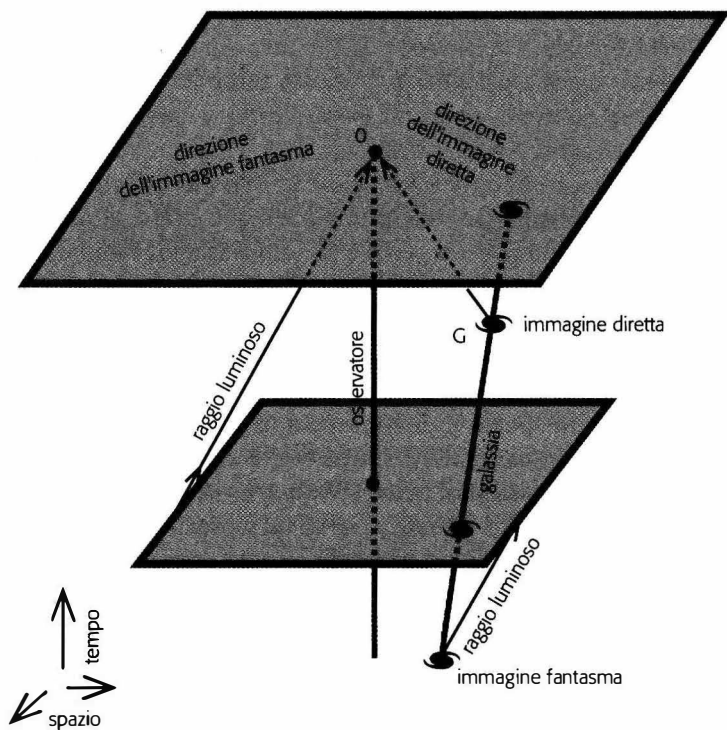
I matematici ci insegnano che, per costruire spazi multiconnessi, si può prendere come punto di partenza uno dei tre tipi di spazi "ordinari" (monoconnessi) a curvatura costante; identificando certi punti gli uni con gli altri, si cambia la forma dello spazio e lo si rende multiconnesso.

L'esempio più semplice è quello per cui il nostro spazio, di curvatura media nulla, sarebbe un ipertoro cubico di grandezza inferiore a cinquanta miliardi di anni luce. In questo caso i

raggi luminosi avrebbero avuto il tempo di fare il giro dell'Universo. Ciò implicherebbe che per ogni oggetto cosmico, ogni galassia per esempio, dovrebbero apparire altrettante immagini fantasma, osservabili in differenti regioni del cielo. Più in generale, in differenti regioni del cielo si potrebbe vedere la ripetizione di uno stesso insieme di galassie; il cielo lontano delle grandi strutture, quali gli ammassi e i superammassi di galassie, sembra, infatti, costituito dalla giustapposizione di blocchi pressoché simili. Un modello di piccolo Universo spiegazzato fornirebbe una spiegazione naturale del fatto che l'universo osservato, benché non omogeneo all'interno di un blocco contenente ammassi e superammassi di galassie, paia omogeneo a scala più grande – molto semplicemente perché vedremmo ripetersi lo stesso blocco ovunque, per una sorta di gioco di specchi!

Se lo spazio è di curvatura positiva, può essere spiegazzato avendo una qualunque delle topologie sopra citate: quella dello spazio proiettivo, o anche quella, più sottile, dello spazio di Poincaré, il cui dominio fondamentale è un dodecaedro. Come abbiamo visto, quanto maggiore è il numero di operazioni di identificazione tra le facce del poliedro fondamentale, tanto minore è il volume dello spazio spiegazzato corrispondente.

Infine, se lo spazio è di curvatura negativa, vi è di nuovo un'infinità di possibilità che sono offerte alla modellizzazione cosmologica: lo spazio di Seifert-Weber, costruito su un dodecaedro, lo spazio di Best, costruito su un icosaedro, o ancora lo spazio di Weeks, il cui volume è il più piccolo tra quelli conosciuti, possono perfettamente essere incorporati in un modello d'Universo relativistico di tipo Big Bang. Tutti questi spazi sono di volume finito, ma non è difficile costruire modelli di spazio spiegazzato euclideo o iperbolico di volume infinito (tutti gli spazi sferici sono finiti). Un cilindro euclideo a tre dimensioni o un corno iperbolico sono spazi chiusi in certe direzioni, ma infiniti in un'altra. [▶ **p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali**] Non è difficile immaginare che tali spazi siano fortemente anisotropi, di modo che la loro applicazione alla cosmologia è più delicata che quella degli spazi spiegazzati finiti.

L'Universo spiegazzato ha esattamente la stessa dinamica, cioè lo stesso comportamento temporale, dell'Universo senza pieghe. È in espansione continua o in espansione-contrazione a seconda della sua curvatura e del valore della costante cosmologica. Ogni sorgente ci appare moltiplicata nello spazio-tempo, poiché le sue radiazioni giungono a noi da direzioni differenti e da epoche differenti del passato (figura 16.3). Gli oggetti che ci sembrano "lontani", lo sono infatti *temporalmente* e non spazialmente, poiché sono immagini di

16.3 I fantasmi appartenenti al passato

I raggi luminosi provengono dal passato. In questa rappresentazione spazio-temporale di un universo torico in espansione, i raggi luminosi ricevuti nello stesso istante da un osservatore *O* provengono dalla stessa galassia *G*, ma sono stati emessi in epoche differenti. L'immagine originale di *G* è la più recente; le immagini fantasma sono necessariamente più antiche.

sorgenti vicine i cui raggi luminosi, seguendo una geodetica molto arrotolata o girando più volte lungo uno stesso percorso, ci hanno messo più tempo per arrivare fino a noi. Lo spostamento verso il rosso di una galassia – che consente di concludere che l'Universo è attualmente in espansione e che, nella cosmologia standard, serve a valutare le distanze grazie alla legge di Hubble – misura in realtà una distanza temporale. Esso dipende esclusivamente dalla data d'emissione della radiazione che arriva a noi ora. Un fantasma "lontano" in uno spazio multiconnesso ha dunque il medesimo spostamento verso il rosso e ci appare nella stessa posizione di una sorgente "reale" che occuperebbe la sua posizione nello spazio del ricoprimento universale.

La distinzione tra "fantasmi" e sorgenti "vicine" non è assoluta; dipende dalla posizione dell'osservatore. Tra tutte le immagini ricevute da una sorgente unica, possiamo chiamare "originale" quella che ha il minore spostamento verso il rosso, ossia quella che è temporalmente più vicina a noi. Si tratta soltanto di una convenzione: le altre immagini, che possono essere dette "fantasmi", sono altrettanto reali; ma il vantaggio sta nel fatto che si può in tal modo cercare di determinare la forma e la grandezza del poliedro fondamentale dell'Universo. Ricostruito dal punto di vista osservativo, è l'insieme delle immagini originali che ci stanno intorno e il cui volume si estende fino ai primi fantasmi rilevati. La posizione che si occupa nella rappresentazione della cellula base è dunque, per definizione, centrale. Dal proprio punto di vista, ogni osservatore è al centro dell'Universo, conformemente all'idea che non esistono punti privilegiati.

Uno spazio che fosse multiconnesso e finito, ma il cui volume oltrepassasse quello dell'orizzonte – frontiera dell'universo osservabile – non si distinguerebbe, a prima vista, dal modello monoconnesso associato, vale a dire dal suo spazio di ricoprimento universale. La determinazione del volume dello spazio reale, dunque, deve essere il punto di partenza di qualunque indagine topologica: più lo spazio sarà piccolo, più la

sua topologia avrà possibilità d'essere rilevabile. Al di là dell'orizzonte, il modello *chiffonné*, spiegazzato, resta un'ipotesi speculativa; rimane indistinguibile dal modello monoconnesso associato, e non rimette in discussione alcun risultato cosmologico standard. Di contro, se è molto più piccolo, offre l'opportunità di arricchire notevolmente le nostre informazioni. Un piccolo Universo spiegazzato offrirebbe all'osservatore più immagini del suo passato, tanto più numerose quanto più è piccolo, al punto che potremmo avere sotto gli occhi una sorta di album di fotografie storiche dei corpi celesti che nascono, vivono e muoiono, compresa la nostra galassia. Già sapevamo che gli astronomi sono degli storici-geografi, poiché, guardando lontano nello spazio, risalgono al passato lontano dell'Universo. Negli spazi monoconnessi gli oggetti visti in un dato passato sono necessariamente distinti da quelli visti in un passato più recente; in un Universo spiegazzato i *medesimi* oggetti possono essere visti in epoche differenti della loro vita, e ciò conferirebbe agli astronomi un indiscutibile vantaggio sugli storici delle società umane.

17
MIRAGGIO TOPOLOGICO

> L'universo (che altri chiama la Biblioteca) si compone d'un numero indefinito, e forse infinito, di gallerie esagonali, con vasti pozzi di ventilazione nel mezzo, bordati di basse ringhiere. Da qualsiasi esagono si vedono i piani superiori e inferiori, interminabilmente. La distribuzione degli oggetti nelle gallerie è invariabile. [...] Nel corridoio vi è uno specchio, che fedelmente duplica le apparenze. Gli uomini sono soliti inferire da questo specchio che la Biblioteca non è infinita (se realmente fosse tale, perché questa duplicazione illusoria?).
>
> JORGE LUIS BORGES

Una galassia lontana invia la sua luce in tutte le direzioni. La si può modellizzare tramite una sorgente luminosa puntuale, che proietta intorno a sé i suoi raggi in maniera isotropa. In uno spazio monoconnesso soltanto uno dei raggi emessi giunge sino a noi, quello che imbocca il cammino più breve tra la galassia e noi, e dà l'immagine unica che vediamo.

Come si è detto nel capitolo "Miraggi celesti", possono esservi delle eccezioni, in ragione della variazione della curvatura *locale* dello spazio, dovuta alla presenza di un corpo massivo posto sulla visuale di una galassia sullo sfondo. I raggi luminosi emessi da quest'ultima sono deviati dal corpo intermedio che ha funzione di lente, e i loro tragitti moltiplicati danno ori-

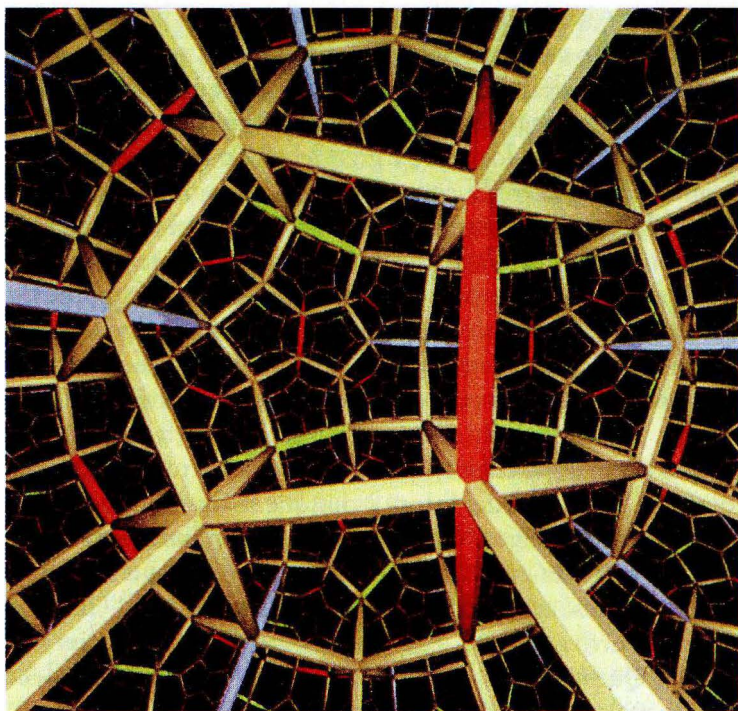
gine a un miraggio gravitazionale, composto da più immagini della medesima galassia. Si sono rilevate numerose illusioni ottiche di questo tipo, ma le immagini fantasma sono sempre molto vicine le une alle altre, raggruppate in una stessa direzione, sullo sfondo della lente.

Fatta eccezione per questi miraggi gravitazionali, se lo spazio è monoconnesso, da ciascuna sorgente lontana giunge a noi una sola immagine. Se invece è multiconnesso, i raggi luminosi imboccano una moltitudine di tragitti, e ogni tragitto genera un'immagine differente della sorgente. Dal momento che questo miraggio è *globale*, e non più locale, le immagini multiple non hanno alcuna ragione d'essere raggruppate nella medesima direzione dello spazio e alla stessa epoca temporale. Al contrario, sono distribuite in tutte le direzioni dello spazio e in tutte le sezioni del passato.

Per esempio, in un Universo che avesse la forma di ipertoro, un primo raggio giungerebbe a noi direttamente, mentre un secondo sembrerebbe venire da una direzione quasi opposta. Infatti, ogni immagine reale formata dai raggi che hanno seguito il cammino più breve per giungere a noi è accompagnata da una moltitudine di immagini fantasma, le quali provengono dai raggi che hanno effettuato un certo numero di giri dell'Universo, in un senso o nell'altro. Nel caso ideale, il numero potenziale di immagini fantasma è infinito. Nella pratica, è limitato in primo luogo dalla grandezza finita dell'universo osservabile, e in secondo luogo dal fatto che le immagini possono essere molto attenuate o mascherate, oppure possedere un'intensità troppo debole per essere visibili. La potenza dei telescopi è determinante; un ammasso di galassie non può essere visto a uno spostamento dello spettro molto grande. Ci scontriamo soprattutto con una barriera temporale: le immagini fantasma potenziali possono corrispondere a un'epoca passata così lontana che l'oggetto in questione non era ancora formato, e di conseguenza non aveva ancora emesso luce! Non dimentichiamoci che, in cosmologia, lontano significa antico, e ciò è ancor più vero per le immagini fantasma.

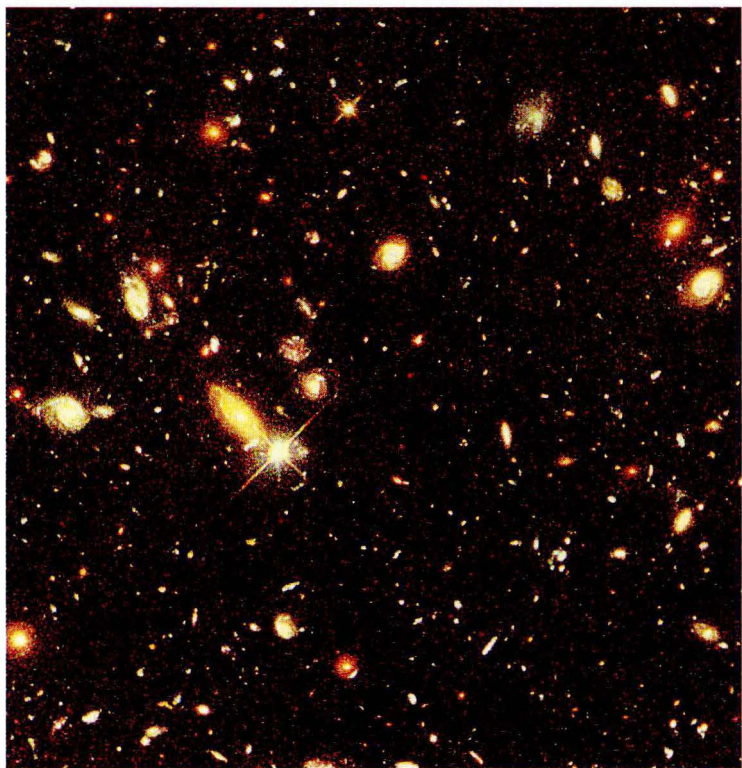
A causa di tali diverse limitazioni, il numero di immagini visibili e le loro caratteristiche dipendono dalla geometria e dalle dimensioni dello spazio spiegazzato. Più quest'ultimo è piccolo, più le immagini sono numerose e vicine, facili da vedere. Inversamente, più lo spazio è grande, meno la sua topologia si manifesta. L'orizzonte cosmico svolge un ruolo essenziale in tutta la cosmologia osservativa. Vi sono più tipi d'orizzonti in cosmologia: l'orizzonte delle particelle, l'orizzonte degli eventi e l'orizzonte dei fotoni. Quello di cui parlo è l'orizzonte dei fotoni, luogo dei punti dello spazio tali che la velocità apparente d'espansione raggiunge la velocità della luce. Al di là di esso, nessun oggetto può essere osservato, poiché la luce che emette non ha avuto il tempo di raggiungerci da quando l'Universo è in espansione, ossia da circa quattordici miliardi d'anni. L'orizzonte dei fotoni è dunque la frontiera dello spazio osservabile, sfera il cui raggio è di circa quindici miliardi di anni luce.[1] Se la grandezza dello spazio reale fosse minore, i raggi luminosi avrebbero il tempo di fare il giro dell'Universo prima di arrivare a noi, e genererebbero molte immagini fantasma. Questi effetti svaniscono allorché la grandezza dello spazio reale si avvicina a quella dell'orizzonte.

Qualche dato concreto ci permette di avere un'idea del gigantesco miraggio cosmico creato da una topologia spiegazzata. Per calcolare il numero potenziale di immagini multiple associate a ciascuna sorgente originale presente nel dominio fondamentale basta dividere il volume occupato dal campione osservato per il volume dello spazio reale. Consideriamo, per esempio, uno spazio euclideo, in espansione da quindici miliardi di anni, ma la cui topologia è quella di un ipertoro cubico di grandezza pari a cinque miliardi di anni luce. Il volume dello spazio reale è dunque quello di questo cubo, vale a dire 125 miliardi di anni luce cubo. Immaginiamo di disporre di telescopi capaci di rilevare tutti gli oggetti – galassie, quasar, ammassi, ecc. – fino a uno spostamento dello spettro verso il

1. Il valore preciso del raggio dell'orizzonte attualmente calcolato dipende da parametri cosmologici: curvatura e costante cosmologica.

17.1 Cristallo cosmico iperbolico

Un universo spiegazzato ha una topologia notevole che permette di identificare lo spazio fisico a un poliedro, la cui immagine moltiplicata costituisce il mondo delle apparenze. Rappresentare la struttura dello spazio apparente significa rappresentare la sua struttura "cristallina", ciascuna maglia della quale è una riproduzione del poliedro fondamentale. È qui raffigurata la struttura apparente che offrirebbe lo spazio iperbolico chiuso di Seifert-Weber (vedi figura 14.8). Visto dall'interno, si avrebbe l'impressione di vivere in uno spazio cellulare, pavimentato all'infinito da dodecaedri deformati da illusioni ottiche.

rosso di 4 (a tali distanze, gli attuali telescopi scoprono soprattutto quasar, che sono gli oggetti intrinsecamente più brillanti). Il volume osservabile sarebbe di 5600 miliardi di anni luce cubo. Vi sarebbero pertanto potenzialmente 45 (cioè 5600 diviso 125) sorgenti fantasma per *ogni* sorgente originale.

Come si è detto in precedenza, la proporzione tra immagini fantasma e originali aumenta con il volume del campione osservato. Se disponessimo ora di un telescopio ideale avente ac-

17.2 Il cielo profondo visto dal telescopio spaziale

I potenti telescopi attuali captano le immagini di milioni di galassie, dalle forme e dai colori diversi, e viste a età differenti. In fotografie di questo tipo nulla ci consente di dire se tutte le galassie siano "originali" o se le galassie più antiche siano immagini fantasma delle galassie più recenti. L'ipotesi di un universo multiconnesso (vedi figura 17.1) non può essere scartata.

cesso all'intero volume dell'universo osservabile, capace dunque di risalire nel passato fino a uno spostamento dello spettro di 1000, a un'epoca precedente la formazione delle stelle, delle galassie e degli ammassi di galassie, saremmo teoricamente in grado di censire tutti gli oggetti cosmici possibili, originali e fantasma. La proporzione salirebbe a 270 sorgenti fantasma potenziali per ogni sorgente originale. Infatti, si possono contare 270 copie del cubo fondamentale nel volume dell'univer-

so osservabile, e ciascuno oggetto del cubo fondamentale ha un'immagine fantasma in ogni copia.

Il caso degli spazi iperbolici spiegazzati è ancor più spettacolare. Un Universo dotato di una densità pari a un terzo della densità critica, ma avente la topologia dello spazio di Weeks (figura 14.9), si ripeterebbe 25.000 volte nella sfera osservabile. Questo numero impressionante non implica tuttavia che le immagini fantasma siano facili da scoprire. Nella pratica, le immagini fantasma più vicine sarebbero situate a spostamenti dello spettro notevoli, paragonabili a quelle dei quasar più lontani attualmente rilevati.

I cosmologi, che si preoccupano di osservazioni concrete e non si accontentano di pure speculazioni matematiche, non possono fare a meno di porsi interrogativi essenziali come questi: la topologia dell'Universo è a sua volta rilevabile? Se viviamo in un piccolo Universo spiegazzato, come possiamo distinguere l'illusione dalla realtà? Alcune delle galassie che vediamo sono dei fantasmi? Potremo mai provarlo?

18

CACCIA AI FANTASMI

> Come i raggi emessi da una sorgente potente, così la realtà del nostro mondo si indebolisce e si perde allorché si allontana da noi. La mano che solleva un martello afferra il reale, lo sguardo che si leva fino ai luoghi più alti della notte non afferra che Idee, Fantasmi, uno sfuggente dilagare di sogni che muore al bordo di ciò che non è.
>
> JEAN TARDIEU

Gli esseri umani hanno acquisito la convinzione che la Terra fosse rotonda ben prima d'averne fatto il giro. I nostri razzi non faranno mai il giro dello spazio, ma possiamo sperare di captare raggi luminosi che hanno viaggiato al nostro posto. Emessi in un passato lontano, hanno forse avuto il tempo di compiere una o più circumnavigazioni cosmiche. Tessendo l'architettura segreta dello spazio, ci offrono indizi diretti o indiretti della sua topologia, e magari ci possono persuadere che esso è ben spiegazzato. Qualche decina di ricercatori sparsi per il mondo sta cercando di portare a termine questo lavoro esplorativo.

Sono state proposte due grandi famiglie di controlli osservativi, entrambe fondate sull'effetto del miraggio topologico. La prima è tridimensionale, poiché si applica a sorgenti luminose "localizzate" come le galassie, i quasar e gli ammassi di galassie, ripartite in profondità nello spazio e nel tempo; la se-

conda è bidimensionale, poiché utilizza la radiazione fossile, questa sorgente diffusa in tutto lo spazio emessa dal plasma caldo dell'Universo primordiale in un'epoca unica del passato, e che ci appare situata alla stessa distanza.

Ciascuna di queste due famiglie di controlli può, a sua volta, suddividersi in due tipi: un primo metodo cerca di riconoscere individualmente le immagini multiple di uno stesso oggetto, compresi le galassie, gli ammassi, ecc., per le sorgenti localizzate, nonché le regioni del plasma emittente per la radiazione di fondo; l'altro metodo, più potente, rinuncia al riconoscimento individuale e si concentra esclusivamente sull'evidenziare le correlazioni statistiche tra le posizioni delle sorgenti di radiazione. Per quanto concerne le sorgenti localizzate, la *cristallografia cosmica* verte sull'analisi di certe regolarità nella distribuzione tridimensionale degli oggetti celesti; per quanto riguarda il fondo diffuso cosmico, il metodo delle *coppie di cerchi* è basato sulla distribuzione angolare delle fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile.

Analizziamo in dettaglio i punti di forza e di debolezza, gli insuccessi e le speranze di ciascuno di questi metodi. Soffermiamoci, anzitutto, sui tentativi di riconoscimento diretto di oggetti individuali. Ci scontriamo immediatamente con una difficoltà: tutte le immagini fantasma di un medesimo oggetto lo presentano secondo aspetti differenti. La causa principale di ciò è l'*evoluzione*. Più i tragitti luminosi sono lunghi, più all'indietro nel tempo va lo sguardo (più è il tempo impiegato dalla luce per giungere fino a noi), più l'oggetto ci appare in uno stato antecedente della sua evoluzione. Se quest'ultima è rapida, l'oggetto non sarà riconoscibile!

Alcune sorgenti hanno una stabilità di durata assai breve (nel senso che esse conservano in maniera effimera lo stesso aspetto), di modo che il tempo necessario a un raggio luminoso per fare un giro dell'Universo e ritornare da noi una seconda volta basta a renderle irriconoscibili, a meno che la circonferenza dell'Universo non sia sufficientemente piccola. I quasar, le galassie di nucleo attivo, le sorgenti radio, al pari di tutte le

configurazioni galattiche di morfologia notevole, hanno un'attività stazionaria di meno di un miliardo di anni, il tempo cioè per un fotone di percorrere poco più di un miliardo di anni luce. Tale grandezza non è molto credibile per svolgere la funzione di circonferenza dello spazio, poiché alcuni vincoli osservativi ci impediscono di supporre che l'Universo sia così piccolo. Queste sorgenti cangianti possono essere utilizzate nelle indagini statistiche del tipo di quelle che intendo esporre tra poco, ma sono inadatte per una caccia ai fantasmi. Le galassie individuali possono conservare la loro configurazione più a lungo, ma il loro enorme numero rende evidentemente le analisi infinitamente difficili.

Gli oggetti più stabili, dunque più facili da identificare, sono gli ammassi di galassie regolari e le galassie giganti poco attive. Gli ammassi regolari sono quasi esclusivamente costituiti da galassie ellittiche e sferiche, e contengono una porzione assai ampia di giganti. Queste sono a loro volta sferiche, tanto che non è importante l'angolo sotto il quale le si osserva. Si tratta allora di reperire un certo numero di caratteristiche individuali in grado di differenziarle o di identificarle: numero totale di galassie, composizione della loro popolazione stellare, raggio dall'ammasso, distribuzione di densità dal centro all'esterno, emissione X del gas interno all'ammasso, ecc. La durata di stabilità di un ammasso ricco di galassie è dell'ordine di cinque miliardi di anni – una durata che permetterebbe ai fotoni di darci immagini fantasma che non siano troppo alterate dall'evoluzione.

Oltre al fatto che le immagini fantasma ci rivelano un oggetto cosmico in più stadi della sua storia, vi sono altri effetti che complicano il compito del cacciatore di fantasmi. Più il tragitto luminoso è lungo, più le dimensioni di una sorgente ci sembreranno piccole, e più debole la sua intensità, poiché queste due grandezze diminuiscono in ragione inversa del quadrato della distanza (ricordiamo che tutte le immagini fantasma occupano la *medesima* posizione spaziale, vale a dire sono alla *medesima* distanza dall'osservatore, ma pure che il loro

allontanamento temporale viene interpretato come un allontanamento spaziale nello spazio apparente, ossia nello spazio di ricoprimento universale).

Infine, ogni immagine fantasma ci svela l'originale orientato in modo differente. Una volta, durante una conferenza, mentre stavo presentando agli studenti la diapositiva di una bella galassia spirale vista di profilo, un allievo mi ha chiesto di mostrargli a cosa somigliasse quella galassia vista di fronte. Nello spazio monoconnesso è evidentemente impossibile percepire lo stesso oggetto in due orientazioni diverse, a meno di non spostarci noi stessi nello spazio (e nel caso di una galassia dovremmo percorrere parecchi milioni di anni luce). In un piccolo spazio spiegazzato, invece, si può tranquillamente restare in poltrona e ammirare a piacere la stessa galassia spirale in tutte le sue facce... a condizione di avere individuato le sue multiple immagini fantasma! La nostra galassia, la Via Lattea, che dalla Terra può essere vista solo dall'interno, potrebbe essere vista "dall'esterno", qualora ne esistessero fantasmi identificabili.

In conclusione, le immagini multiple di un oggetto dato ci appaiono in direzioni differenti, con intensità differenti, sotto orientazioni differenti e a epoche differenti della sua storia. Dunque, non si somigliano. È per questo che è difficile sapere per identificazione diretta se l'Universo sia spiegazzato: molte di quelle che consideriamo galassie originali potrebbero essere repliche fantasma di un numero limitato di galassie reali – repliche che sarebbe impossibile, in assenza di un marcatore preciso, riconoscere come tali.

E tuttavia, i ricercatori continuano la partita. Boudewijn Roukema e Chris Edge hanno avanzato l'ipotesi che la forte luminosità nel dominio dei raggi X emessi da certi ammassi di galassie potrebbe costituire un marcatore. Si tratta, infatti, di un gas interno all'ammasso, nel quale si bagnano le galassie, che è scaldato a parecchi milioni di gradi ed emette questa radiazione di alta energia, rilevabile a grandissime distanze. Questi "ammassi X" sono, inoltre, dinamicamente stabili; potrebbero,

dunque, rivelarsi più efficaci delle altre sorgenti di radiazione localizzate per scoprire direttamente la topologia. Nel 1997 Roukema e Edge hanno congetturato che l'ammasso Coma, l'ammasso RXJ 1347.5-1145 e l'ammasso CL 09104+4109, visti a spostamenti spettrali differenti, ma presentanti tutti e tre una forte luminosità X, potrebbero essere le immagini fantasma di un solo e unico ammasso in una topologia ipertorica non orientabile (una sorta di otre di Klein tridimensionale). La loro ipotesi è difficile da respingere; ma la possibilità che si tratti di una pura coincidenza è troppo grande perché una simile rilevazione effettiva sia credibile.

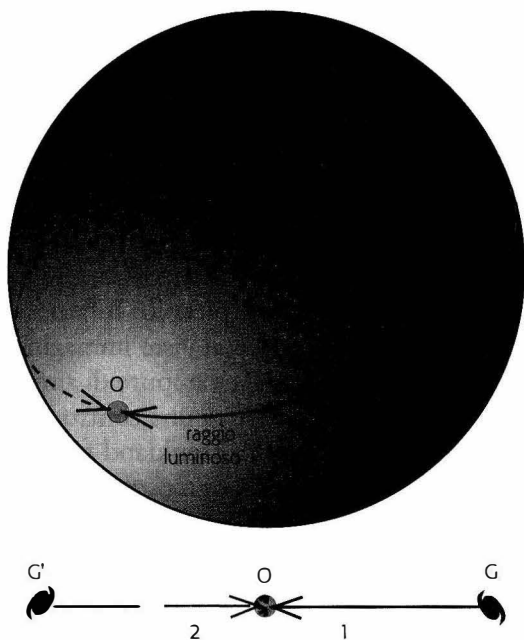
19

SOLI DI MEZZANOTTE

> L'uomo che contempla il cielo, vi ammira sovente astri che non esistono più, ma egli li scorge ugualmente in virtù del loro raggio fantasma, nell'Illusione dell'Universo.
>
> VILLIERS DE L'ISLE-ADAM

Per quanto la ricerca osservativa di effetti topologici diretti non sia determinante, essa fissa comunque dei limiti ai modelli di universo spiegazzato, e in particolare dei vincoli di grandezza. I dati attuali permettono, in particolare, di eliminare la possibilità di un Universo molto piccolo. Infatti, malgrado i tentati rilevamenti, non si sono mai viste immagini fantasma del Sole, né della nostra galassia, e neppure di ammassi di galassie vicini. Nel 1913, nel quadro di una controversia circa la realtà dello spazio curvo, Barrett Frankland fece notare che, in uno spazio sferico, ciascuna stella mostrerebbe le sue facce davanti e dietro in due direzioni opposte del cielo. Dovremmo pertanto vedere due Soli: il Sole ordinario, cioè l'immagine dell'astro come era 500 secondi prima (il tempo impiegato dalla luce per percorrere i 150 milioni di chilometri che ci separano da lui), e l'anti-Sole, situato all'antipodo della sfera celeste, che lo mostra come era molto prima (il tempo impiegato dalla luce per compiere una circonferenza dell'Universo). Frankland ne concluse che non avrebbe dovuto esservi più oscurità sulla Terra, giacché l'anti-Sole avrebbe brillato per

tutta la notte! Perciò, a suo dire, l'ipotesi era falsa, e andava rifiutata l'esistenza di uno spazio sferico.

In un articolo seminale del 1900 Karl Schwarzschild aveva discusso il problema, senza però giungere a escludere la possibilità di uno spazio sferico; a suo parere, un anti-Sole poteva esistere, anche se non era visibile, poiché la luce, attraversando lo spazio, subiva un assorbimento sufficiente per cancellare questa immagine secondaria. Willem de Sitter riprese a sua volta la questione nel 1916. Einstein aveva appena pubblicato la teoria della relatività generale, che implicava una reale curvatura dello spazio fisico – facendo così passare il concetto di spazio sferico dal rango di pura speculazione matematica a

19.1 Circumnavigazione dello spazio

In uno spazio ipersferico un osservatore *O* vedrebbe in linea di principio i raggi luminosi emessi da una galassia *G* provenire da due direzioni opposte. Ma se l'espansione dell'universo fosse assai rapida, il raggio luminoso 2 non riuscirebbe mai a compiere il giro dello spazio, sicché l'osservatore non vedrebbe l'immagine fantasma *G'*.

quello di ipotesi fisica plausibile. Willem de Sitter fece semplicemente notare che, affinché l'anti-Sole non fosse visibile, bastava che il tempo impiegato dalla luce per compiere il giro dell'Universo oltrepassasse l'età del Sole. All'epoca si supponeva che il raggio dello spazio sferico fosse costante, poiché non era ancora stata stabilita l'espansione dell'Universo. Quest'ultima scoperta doveva fornire un nuovo argomento, dal momento che, in uno spazio in espansione, il tempo impiegato dalla luce per compiere una circumnavigazione dello spazio è aumentato. Immaginiamo una formica sulla superficie di un pallone che viene gonfiato: quale che sia il tempo di cui dispone, essa non riuscirà mai a fare un giro completo del pallone se la circonferenza di quest'ultimo cresce troppo velocemente.

Il fatto di non rilevare immagini fantasma situate agli antipodi di un oggetto celeste non esclude allora la possibilità di uno spazio finito a topologia spiegazzata. Ciò impone semplicemente dei vincoli di grandezza minima.

Chiamiamo *L* la più piccola dimensione dello spazio spiegazzato. Per esempio, nel caso di un ipertoro, *L* è il lato più piccolo del parallelepipedo fondamentale. Ci aspetteremmo di trovare almeno un'immagine fantasma a una distanza apparente dell'ordine di *L*. Così, in uno spazio ipertorico, la nostra galassia sarebbe vista in più esemplari, in direzioni perpendicolari, a distanze apparenti dell'ordine di *L*. Ora, come hanno mostrato i russi Dimitrij Sokolov e Viktor Shvartsman, pionieri in questo tipo di indagini durante gli anni Settanta del Novecento, nessuna immagine di galassia simile alla nostra è presente a una distanza di 25 milioni di anni luce.

Tale limite inferiore alla grandezza di un piccolo Universo spiegazzato può essere spostato indietro se si utilizzano altri oggetti notevoli – ammassi di galassie vicini ben noti, come per esempio quello di Coma. Quest'ultimo è l'ammasso di galassie più studiato dell'emisfero Nord: conosciamo la sua luminosità totale, la sua forma ellittica caratteristica, sappiamo che contiene al centro due galassie giganti, una delle quali è circondata da una decina di piccole galassie satelliti, mentre la maggior parte degli altri ammassi, densi in mezzo come Co-

ma, ha soltanto una galassia dominante. Sappiamo pure che può essere dinamicamente stabile per parecchi miliardi di anni. In breve, Coma dovrebbe essere facilmente riconoscibile a grandi distanze spaziali e temporali. Ma non la si ritrova da nessuna parte nella zona esplorata intorno a essa, vale a dire in una sfera il cui raggio raggiunga 400 milioni di anni luce, come ha notato Richard Gott nel 1980.

Questo genere d'esame può essere condotto non più soltanto su oggetti individuali, bensì su cataloghi d'oggetti studiati in maniera statistica. Nel 1974 Sokolov e Shvartsman hanno proposto per la prima volta misure basate sull'analisi di due grandi cataloghi di ammassi, quello di Abell che comprende 2712 ammassi ricchi, e quello di Zwicky che contiene 9730 ammassi di ogni genere. Tutti hanno uno spostamento verso il rosso inferiore a 0,2 e si trovano dunque a meno di 2,5 miliardi di anni luce. A tale distanza, gli ammassi ricchi sono necessariamente "originali"; infatti, gli ammassi più vicini che vengono osservati sono anche poveri, e poiché la tendenza naturale degli ammassi è di arricchirsi nel corso dell'evoluzione, gli ammassi poveri non possono rappresentare ammassi ricchi in uno stadio ulteriore.

Un'altra osservazione del genere è stata realizzata da Gott intorno alla regione di Serpens-Virgo, la quale contiene più ammassi ricchi caratteristici, che costituiscono buoni soggetti di rilevamento: questa regione si trova a una distanza di circa 1,5 miliardi di anni luce e non è identificabile in alcun dintorno vicino.

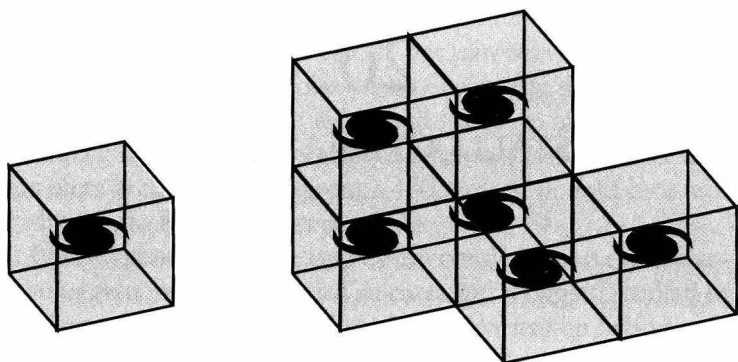
Il vincolo circa la grandezza dello spazio imposto da queste svariate osservazioni è: $L > 2{,}5$ miliardi di anni luce. Resta ancora molto margine per arrivare alla distanza dell'orizzonte cosmologico. Il raggio di quest'ultimo dipende dal valore dei parametri cosmologici; per esempio, in un Universo euclideo (curvatura spaziale nulla) senza costante cosmologica è di 18 miliardi di anni luce, mentre in un universo di medesima curvatura, ma con una costante cosmologica di 0,7, raggiunge 50 miliardi di anni luce! Dunque, l'ipotesi di uno spazio spiegazzato, molto più piccolo dello spazio osservato, rimane perfettamente suscettibile di sviluppo.

20

CRISTALLOGRAFIA COSMICA

> Vi sono universi di quarzo, di serpentina, mondi di grafite e fuochi di feldispato.
>
> STRADA

Se la caccia ai fantasmi sembra compito quasi impossibile, lo spiegazzamento dell'Universo, inscritto nella distribuzione delle galassie lontane, potrebbe rivelarsi meglio in termini statistici. Per dimostrare l'esistenza di una topologia multiconnessa, basterebbe scoprire motivi ripetuti nella disposizione delle galassie. Come era stato ipotizzato da Karl Schwarzschild nel 1900 (figura 20.1), se risultasse che le galassie sono distribuite secondo una trama regolare, con immagini della stessa galassia che si ripetono nei punti equivalenti della trama, si potrebbe concludere che il nostro Universo è un ipertoro. Motivi simili, ma più complicati, rivelerebbero topologie più sottili. Quale tipo di motivi cercare, senza fare ipotesi *a priori* sulla topologia dello spazio?

I modelli di Universo spiegazzato hanno una proprietà comune: la distanza apparente tra due immagini fantasma di una medesima sorgente appartiene sempre a un insieme definito di valori, legati alla grandezza del poliedro fondamentale. Le relazioni tra questi valori sono analoghe a quelle che legano gli atomi di un cristallo. Roland Lehoucq, Marc Lachièze-Rey (Centro studi di Saclay) e io stesso abbiamo proposto un'analisi *cristallografica* della distribuzione degli og-

20.1 Vie Lattee multiple

Nel 1900 l'astronomo Karl Schwarzschild aveva immaginato che la nostra galassia, la Via Lattea, potesse ripetersi indefinitamente secondo uno schema cubico regolare, dando così l'illusione di uno spazio più vasto di quello che è in realtà.

getti cosmici, volta a cogliere gli indizi di multiconnessità dell'Universo.

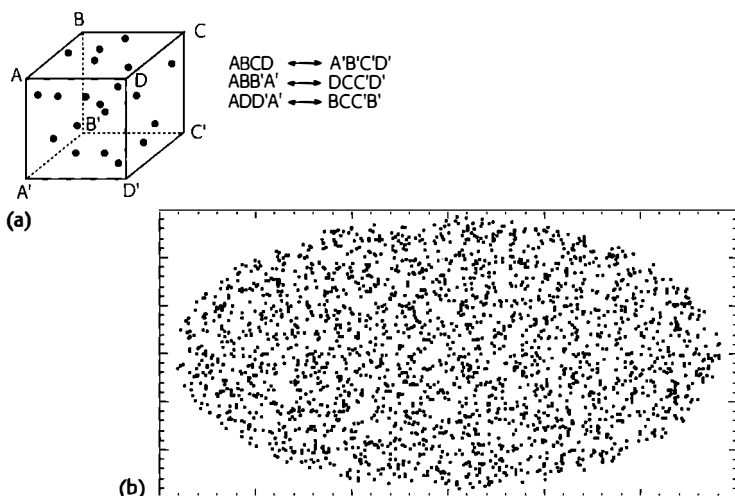
Perché mai questo riferimento alla cristallografia, una branca della fisica dei solidi? Ciò che colpisce non appena si esamina un cristallo è l'esistenza di facce piane naturali, che formano tra loro angoli precisi, nonché una costruzione per giustapposizione di cellule accollate le une alle altre. Peraltro, i cristalli sono al centro della maggior parte dei fenomeni ottici che ingannano il nostro occhio. Così, i maestosi "falsi soli" (detti parielii), che tanto hanno segnato l'immaginazione dei popoli, sono dovuti alla rifrazione della luce da parte dei cristalli di ghiaccio esagonali in sospensione nell'atmosfera.

Nel 1610 Keplero scopre le forme sesangolari dei cristalli di neve, ma all'epoca il suo lavoro si perde nell'oblio. [▶ **p. 337, La simmetria**] Alla fine del XVIII secolo il naturalista René-Just Haüy lascia cadere per sbaglio sul pavimento del suo laboratorio un pezzo di calcite – un cristallo di forma romboedrica. Constata con sorpresa come ciascuno dei pezzi conservi tale forma romboedrica. Haüy si chiede allora cosa accadrebbe rompendo indefinitamente la calcite. Congettura di giungere a

un dato momento a una "più piccola parte" che possieda ancora la forma della calcite, una sorta di cellula fondamentale romboedrica (che battezzerà "molecola integrante") il cui assemblaggio nello spazio costruirebbe la calcite. Tenta l'esperimento e scopre effettivamente il più piccolo romboedro al di sotto del quale la calcite si scompone in altri corpi. Generalizzando tale principio a tutti i cristalli, cerca poi di determinare per ciascuno di essi la cellula fondamentale. Trova così sei tipi di strutture, caratterizzate dalle loro simmetrie spaziali. Non restava che classificare i cristalli: era nata la cristallografia.

La molecola integrante o cellula fondamentale del cristallo ricorda per certi versi il dominio fondamentale dello spazio multiconnesso. Il cristallo cosmico è lo spazio osservato, costituito dalla ripetizione dello stesso dominio. Una prima differenza rispetto al cristallo minerale è che il cristallo cosmico è spazio-temporale: i tasselli – i pezzi del mosaico universale – sono lo stesso pezzo di spazio visto a età differenti, e ciò complica il compito dell'astronomo, che cerca di ricostruire tramite l'osservazione il poliedro fondamentale dell'Universo. Una seconda differenza è che noi ci troviamo all'*interno* del cristallo cosmico.

Non sorprende, dunque, che la cristallografia adatti certi metodi utilizzati nella fisica dei solidi (diffrazione di raggi X tramite reticoli, ecc.) al fine di scoprire le "molecole integranti". Abbiamo cominciato con il simulare universi in forma di ipertoro, di dimensione L relativamente piccola, e dunque di volume L^3 molto più piccolo dell'universo osservabile. Questi universi fittizi contengono N sorgenti reali, per esempio galassie; ma *sembrano* popolati da una moltitudine di oggetti. Tutte le immagini fantasma che si giustappongono alle N immagini reali sono riconoscibili come tali e danno l'impressione di un universo molto grande, popolato da astri originali (vedi la figura 20.2). Infatti, la distribuzione angolare di queste sorgenti nel cielo non mostra nulla di particolare e assomiglia alla distribuzione apparente delle galassie realmente osservate.

Eppure, poiché nei nostri universi simulati abbiamo supposto lo spazio multiconnesso, tutte le immagini fantasma di

20.2 Una molecola integrante cosmica

(a) Lo spazio è qui un ipertoro, rappresentato dall'interno di un cubo di 5 miliardi di anni luce di lato, le cui facce opposte sono identiche. 20 galassie sono distribuite a caso nello spazio.
(b) Simulazione numerica dell'apparenza del cielo tenendo conto dell'effetto di miraggio topologico. Ciascuna galassia reale genera una cinquantina di immagini fantasma ripartite sull'intera volta celeste. Tra le centinaia di immagini visibili è impossibile distinguere le immagini reali da quelle fantasma.

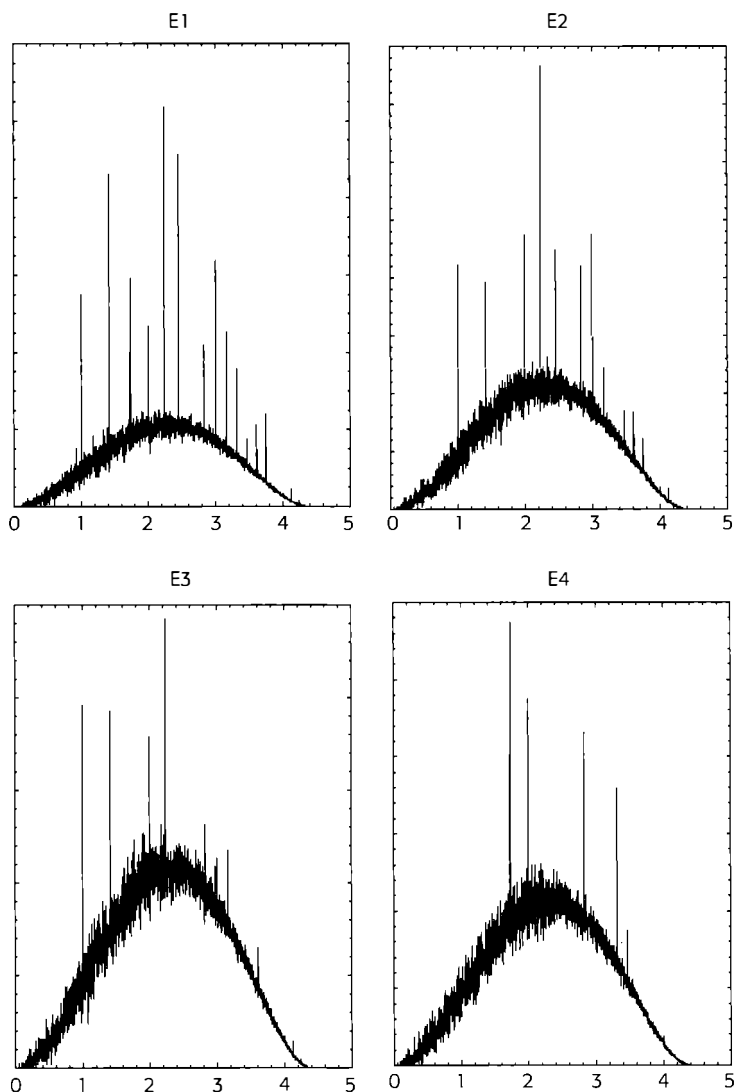
una data sorgente occupano posizioni particolari nello schema universale; le loro mutue separazioni devono appartenere a un insieme di lunghezze ben precise, legate alla dimensione della cellula fondamentale. Al contrario, in un universo monoconnesso riempito di galassie "originali" distribuite casualmente, le mutue separazioni tra tutte le coppie di galassie sono a loro volta distribuite casualmente. Vi è un metodo che permette di distinguere i due casi: l'istogramma delle separazioni delle coppie.

Un istogramma è una curva "in scala" che conta il numero delle coppie separate da una data distanza. Consideriamo, per esempio, 10.000 oggetti che possono essere accoppiati in 50 milioni di maniere differenti. Tra questi 50 milioni di coppie, immaginiamo che 36.120 siano separate da 100 milioni di anni lu-

ce a meno dell'1%, 45.284 da 200 milioni di anni luce, a meno dell'1%, e così via. Se tutte le galassie sono distribuite in maniera casuale in un universo monoconnesso, l'istogramma delle mutue distanze adotterà una caratteristica forma a campana. Se lo spazio è spiegazzato, solo le galassie originali sono distribuite in modo casuale, mentre tutte le loro immagini fantasma sono distribuite secondo uno schema regolare. La cellula dello schema si ritroverà un gran numero di volte nella separazione tra due galassie: ogni volta si tratterà di due immagini fantasma della stessa sorgente. Così, nell'istogramma di separazione delle coppie, ogni lunghezza caratteristica della maglia accumulerà un gran numero di coppie separate da questa lunghezza.

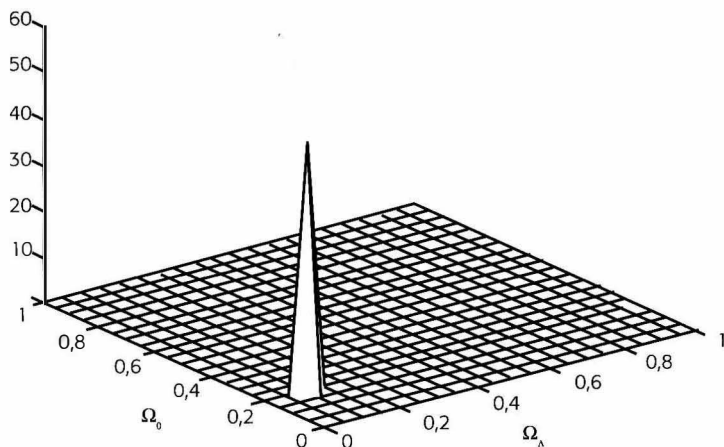
Le nostre simulazioni numeriche hanno mostrato l'importanza dell'effetto: nell'istogramma simulato nel caso di un universo torico appaiono picchi caratteristici, i quali sono invece assenti nel caso dell'universo multiconnesso. Quando si cambia topologia, i picchi restano, ma in posizioni e con altezze relative differenti (vedi figura 20.3).

La *spettroscopia* dei picchi fornisce un'effettiva segnatura della topologia sottostante, a condizione, però, che si applichi a cataloghi di oggetti che si estendono a distanze apparenti superiori alla dimensione della cellula. Proprio questo è il punto. I cataloghi di oggetti cosmici attualmente disponibili sono o estesi in direzione, ma poco profondi; oppure profondi, ma estremamente localizzati in una direzione del cielo. Per esempio, il più vasto catalogo d'ammassi di galassie su cui disponiamo di tre coordinate (due per la direzione e una per l'allontanamento apparente, data dallo spostamento verso il rosso) contiene circa 1000 oggetti che non si estendono oltre i 2 miliardi di anni luce. L'applicazione del test dell'istogramma a questo catalogo non fa apparire alcun picco, e ciò conferma che la grandezza dell'Universo è superiore a 2 miliardi di anni luce, come altre analisi avevano mostrato (quelle di Sokolov, Shvartsman e Gott).

Perché limitarsi a cataloghi di ammassi di galassie? Vi sono altre popolazioni di oggetti, come i quasar o le sorgenti responsabili di misteriose esplosioni di raggi gamma, che si contano a centinaia e che sono situate a distanze cosmologiche.

20.3 Il metodo dell'istogramma

Queste simulazioni numeriche applicano il metodo dell'istogramma delle separazioni di coppie a quattro spazi euclidei spiegazzati. La presenza di picchi segnala una topologia multiconnessa: la loro posizione riflette la grandezza del poliedro fondamentale e la loro altezza relativa caratterizza il gruppo di olonomia.

Sfortunatamente, le esplosioni di raggi gamma occupano una vasta copertura del cielo, ma il loro allontanamento non è conosciuto con la precisione necessaria perché si possa applicare il test dell'istogramma. Quanto ai quasar, abbiamo visto che hanno un tempo di vita così breve – 100 milioni di anni – che i loro raggi luminosi non avrebbero il tempo per compiere il giro dell'Universo e fare in modo che l'immagine fantasma di un quasar sia anch'essa un quasar. Ciononostante, Jean-Philippe Uzan, Roland Lehoucq e io stesso abbiamo applicato il metodo cristallografico a un catalogo di 11.000 quasar: l'assenza di picco conduce a eliminare uno spazio euclideo più piccolo della metà del raggio dell'orizzonte.

Siamo solo all'inizio della cartografia cosmica. I Magellano e i Vasco da Gama del XVI secolo hanno progressivamente esteso il mappamondo includendovi terre sempre più lontane; allo

20.4 Il metodo CCP

A partire da un catalogo di galassie, si raccolgono in un solo indice tutte le coppie di sorgenti topologicamente correlate. Se si ottiene un picco simile a quello della figura, da un lato si ha la prova che lo spazio è multiconnesso, dall'altro se ne ricavano i valori del parametro di densità Ω_0 e della costante cosmologica Ω_Λ.

stesso modo, gli astronomi odierni, dotati di spettrografi che permettono loro di valutare le distanze apparenti delle galassie, costruiscono lentamente la mappa tridimensionale del cosmo. La loro esplorazione resta limitata in profondità, vale a dire a spostamenti spettrali assai bassi, ma l'estensione della mappa a un volume apprezzabile dell'Universo è solo una questione di tempo e di pazienza. Sono in corso programmi di censimento sistematico d'oggetti a grande spostamento spettrale. Mentre i cataloghi tridimensionali di ammassi di galassie saranno sufficientemente ricchi per copertura del cielo e profondità, intorno al 2010, il test cristallografico potrebbe rivelarsi decisivo per quanto concerne la scoperta della topologia dello spazio.

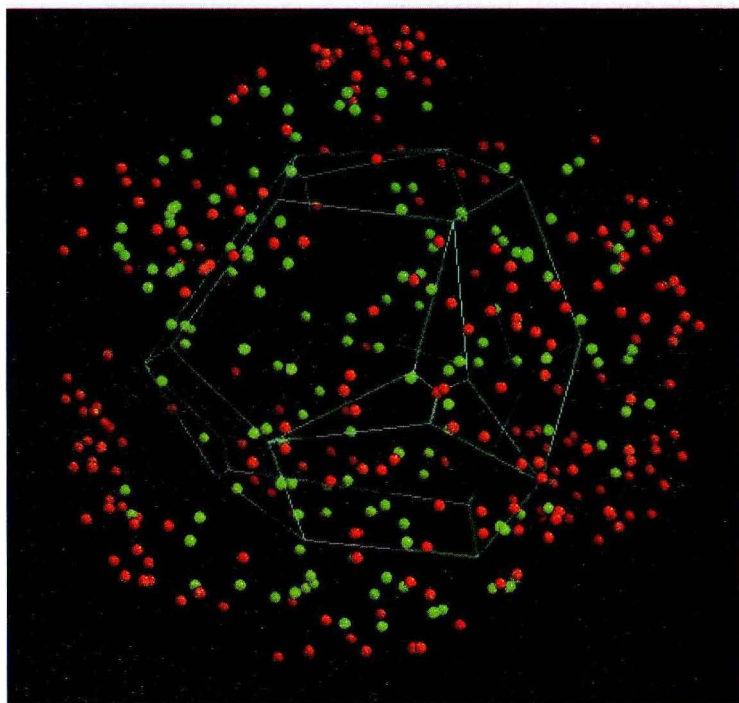
Nell'attesa, dobbiamo cercare di migliorare le nostre tecniche di analisi cristallografica, tanto più che il metodo dell'istogramma si applica a un caso importante: quello dello spazio a curvatura negativa. Abbiamo pertanto sviluppato un nuovo metodo, detto CCP (*Collecting Correlated Pairs*), destinato a estrarre il massimo segnale topologico in qualsiasi tipo di spazio spiegazzato.

L'interesse inaspettato di questo metodo è il seguente: l'estrazione del segnale richiede la conoscenza dei valori dei due parametri di curvatura – la densità di materia e la costante cosmologica. Per ottenere un segnale topologico (se ce ne è uno!) a partire da un catalogo di dati reali, ossia perché la simulazione possa "vedere" gli eventuali picchi, dobbiamo scegliere i buoni valori di questi parametri con una precisione di qualche per cento. Tale proprietà discende da un teorema matematico detto di "rigidità", in virtù del quale la topologia di uno spazio iperbolico fissa in modo unico le sue proprietà di curvatura. Ecco un interessante rovesciamento epistemologico. [▶ **p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali**]

Se per decenni la cosmologia osservativa si è sforzata di determinare direttamente i parametri di curvatura, trascurando le possibilità topologiche, non potrebbe darsi che nel XXI secolo sia soprattutto la determinazione sperimentale della topologia dell'Universo a consentire di fissare con grande precisione la curvatura e la costante cosmologica, quei parametri

tradizionali da cui dipende il destino ultimo del cosmo – espansione perpetua o contrazione?

I metodi statistici che analizzano le posizioni spaziali apparenti degli oggetti astrofisici lontani (a grande spostamento spettrale) sono delle idealizzazioni e devono essere adattati nella pratica per tenere conto del fatto che vediamo questi oggetti nel passato e tramite espedienti osservativi. Questi ultimi sono numerosi e troppo complicati per potere essere affrontati qui. Ne citerò un solo esempio: i movimenti propri delle sorgenti.

Nel caso ideale le sorgenti sono fisse in una griglia di coor-

20.5 Fantasmi nello spazio di Weeks

Questa simulazione numerica calcola le immagini fantasma più vicine che sarebbero viste nello spazio iperbolico chiuso di Weeks, il cui poliedro fondamentale è rappresentato in blu (vedi anche figura 14.9).

dinate che segue l'espansione dell'Universo (detta "griglia comobile"). Di conseguenza, se le sorgenti presentano certe correlazioni tra loro in ragione di una topologia particolare, queste devono conservarsi nel corso dell'evoluzione cosmica e, pertanto, nelle cellule che costruiscono nello spazio osservabile. Ma i corpi celesti si muovono; le galassie, per esempio, raggruppate per la maggior parte in ammassi, sono dotate di un movimento proprio di qualche centinaia di chilometri al secondo intorno al centro di gravità dell'ammasso, il quale si aggiunge al movimento apparente di fuga, e in una direzione che non ha alcuna ragione di coincidere con la direzione radiale di fuga. A loro volta, gli ammassi di galassie possono essere portati da movimenti locali in direzione del centro d'attrazione di un superammasso. È così che il superammasso di galassie cui noi apparteniamo, Virgo, è in caduta libera a una velocità di circa 600 km/s verso un'immensa concentrazione di materia corrispondente a un superammasso, chiamato "Grande Attrattore", scoperto di recente.

La realtà, dunque, è diversa. Nelle differenti cellule dell'Universo cristallografico i rapporti di posizione tra gli "atomi" cambiano leggermente: le immagini fantasma di una galassia sono spostate rispetto alle posizioni regolari attese.

Riprendiamo il paragone con le candele in una stanza tappezzata di specchi. Supponiamo che, invece d'essere fisse, tali candele siano portate da una lenta processione d'angeli invisibili. Tutt'intorno, gli specchi riflettono non soltanto i barlumi di luce, ma anche i movimenti da cui questi sono animati. Per l'astronomo non si tratta di una processione, bensì di spostamenti incoerenti, poiché alla fine egli vede il movimento reale (sulle immagini più vicine) e immagini fantasma il cui senso di spostamento è modificato, se non invertito, dalle riflessioni successive. Soltanto un'osservazione accurata può consentire all'astronomo di distinguere in primo piano una processione che si staglia su un fondo disordinato. Torniamo all'Universo reale: supponiamo che esso misuri soltanto cinque miliardi di anni luce e che lo spazio osservato a più grande distanza apparente sia riempito unicamente di riflessi fantasma. L'astronomo

dovrebbe rimarcare una discontinuità a partire dal limite dell'Universo. In altri termini, gli ammassi di galassie, che si allontanano gli uni dagli altri nella parte reale, dovrebbero partire in tutti i sensi quando se ne osservano le immagini fantasma.

Dal momento che non si è visto nulla del genere, si potrebbe pensare che vi sia qui una seria obiezione all'ipotesi di un piccolo Universo spiegazzato. In realtà, questa obiezione avrebbe senso se l'Universo fosse statico e se le velocità proprie degli oggetti cosmici fossero assai elevate. Ma lo spazio è in espansione, e questo fenomeno si manifesta in tutte le cellule di un Universo cristallografico, a un tasso proporzionale (secondo la legge di Hubble) alla distanza *apparente* delle galassie; di conseguenza, l'espansione nelle cellule lontane apparirebbe più rapida che nelle cellule vicine. Ora, la velocità di fuga apparente delle galassie a una distanza di 5 miliardi di anni luce, 100.000 km/s, è di molto superiore alle loro velocità particolari (per esempio, le loro velocità di spostamento entro gli ammassi, che non superano i 1000 km/s). I movimenti particolari delle immagini fantasma sarebbero, dunque, impercettibili rispetto ai loro movimenti di fuga apparente. È come se l'osservazione delle candele si effettuasse in una stanza in rapida espansione; gli specchi delle pareti si allontanerebbero così velocemente che nessuno dei riflessi fantasma potrebbe avvicinarvisi.

I movimenti propri delle galassie inducono, malgrado tutto, a sottili correzioni di cui bisogna tenere conto nell'applicazione dei metodi di riconoscimento cristallografico di oggetti fantasma.

Il lettore avrà compreso che la ricerca di una segnatura topologica chiara e precisa è altrettanto difficile che la determinazione sperimentale dei parametri di curvatura (densità, costante cosmologica) e della costante di Hubble. Per questi ultimi ci è voluto più di mezzo secolo di ricerche per cominciare ad avere risultati convergenti. Quanto tempo occorrerà per individuare forchette ragionevoli per i parametri topologici? Grazie alla crescita esponenziale delle prestazioni dei nostri strumenti, potrebbe darsi che bastino solo dieci anni...

21

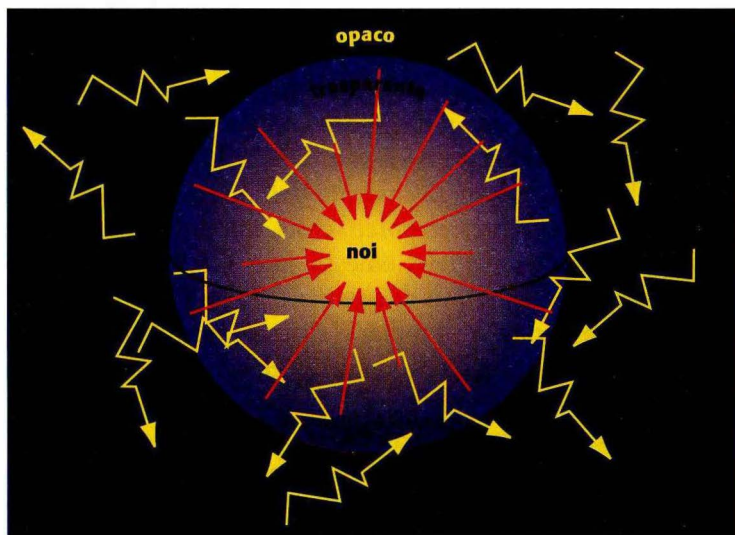
CERCHI IN CIELO

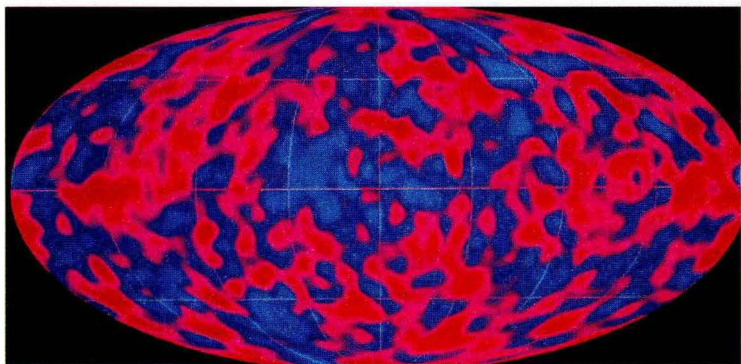
> Vecchia di millenni, la luce delle stelle era in cammino verso di noi e a noi era giunta infine da insondabili profondità.
>
> JEAN-PAUL RICHTER

Poiché la topologia è una proprietà globale dell'Universo, per controllarla sembra opportuno utilizzare sorgenti di radiazione che occupino il maggiore volume di spazio possibile, così da avere il massimo di possibilità di rilevare fantasmi. Oggi abbiamo accesso all'insieme dell'universo osservabile grazie al fondo diffuso cosmico, ossia alla radiazione fossile dell'Universo primordiale, emessa solo 350.000 anni dopo quello che si è convenuto di chiamare il Big Bang. Confrontiamo questa durata ai 14 miliardi di anni che ne sono seguiti: è un po' come se un essere umano di cent'anni vedesse in cassetta il video dei suoi primi vagiti. Nella sua prima giovinezza l'Universo era apparentemente pieno di plasma caldo e denso, nel quale i fotoni – particelle di luce – restavano intrappolati nei campi elettrici di particelle cariche come elettroni e protoni. Prigionieri della materia, i fotoni non potevano circolare. Dopo 350.000 anni di espansione cosmica, la temperatura è diminuita, gli elettroni si sono bruscamente combinati con i protoni in un processo chiamato tecnicamente "ricombinazione", i campi elettrici si sono neutralizzati. I fotoni sono stati dunque liberati e hanno potuto cominciare a

viaggiare senza posa nello spazio e nel tempo. [▶ **p. 311, La radiazione fossile**]

Poiché l'Universo ha continuato a dilatarsi e a raffreddarsi durante il "viaggio", la luce si è raffreddata nel medesimo tempo. La radiazione fossile può essere caratterizzata da una temperatura, giacché essa è di un tipo particolare, la cosiddetta "radiazione di corpo nero". Quando è stata emessa, la sua temperatura era di 3000 gradi; oggi è scesa a 2,728 K al di sopra dello zero assoluto (cioè a –270 gradi Celsius, 200 gradi meno di un freddissimo giorno in Antartico). In termini di lunghezze d'onda, la luce originale è passata dal dominio visibile al dominio delle microonde.

Il fondo diffuso cosmico è notevolmente uniforme: la sua temperatura e la sua densità sono le stesse in tutte le parti del

21.1 La superficie di ultima diffusione

La radiazione fossile riempie lo spazio-tempo, ma i fotoni di cui noi possiamo misurare l'energia sono quelli che arrivano qui e ora. Essi hanno cominciato il loro viaggio nello stesso istante della storia cosmica, circa 14 miliardi di anni fa, e alla stessa distanza da noi: sulla superficie di ultima diffusione, che segna la transizione tra un universo opaco e un universo trasparente.

21.2 Le fluttuazioni della radiazione fossile

Emessa a una temperatura di 3000 gradi, la radiazione cosmica di fondo giunge a noi con una temperatura mille volte più bassa, nella gamma delle microonde. Questa mappa a microonde del cielo, ottenuta nel 1992 dal satellite astronomico COBE, rappresenta lo stato dell'Universo quattordici miliardi di anni fa, all'epoca in cui non era che un plasma omogeneo, eccetto minuscole variazioni di temperatura, evidenziate qui dai colori. Lo scarto massimo tra i punti più caldi (rosso scuro) e i punti più freddi (blu chiaro) non supera un centomillesimo di grado.

cielo con una precisione migliore di un decimillesimo. A corollario, la curvatura dello spazio è costante a quasi un centomillesimo. Quando hanno scelto di costruire i loro modelli d'Universo con una curvatura spaziale costante, Fridman e Lemaître erano guidati dalla considerazione pragmatica che erano le sole soluzioni calcolabili, ma anche da motivi di semplicità e di eleganza, cioè dal cosiddetto principio copernicano. Apparentemente, la natura ha utilizzato sempre lo stesso criterio.

Dopo la scoperta della radiazione fossile, i cosmologi hanno compreso che la temperatura di tale radiazione dovrebbe dipendere dalla direzione in cui si guarda. E per una buona ragione: nel nostro universo materiale si osservano delle eterogeneità là dove la densità è maggiore o minore della media. Anche tu, caro lettore, sei un'eterogeneità di scala molto piccola (in base ai criteri cosmologici). Il Sistema solare, la nostra galassia, il nostro gruppo locale di galassie, il nostro superam-

masso locale Virgo sono altrettanti esempi di eterogeneità di taglia crescente. Ci si aspetta che abbiano tutti la loro origine nelle eterogeneità dell'Universo primordiale, prima ancora della ricombinazione. Anzi, se in quell'epoca l'Universo fosse stato un brodo perfettamente omogeneo, privo di grumi, lo sarebbe rimasto in eterno, e noi non saremmo qui a scrivere di cosmologia!

Le eterogeneità originali erano associate a differenze di temperatura da una regione all'altra del plasma primordiale. Tali fluttuazioni devono essere evidenti nella radiazione cosmica. Inoltre, anche se le regioni d'emissione avessero tutte avuto la stessa temperatura iniziale, la luce fossile avrebbe attraversato differenti galassie e ammassi di galassie intermedi, ossia piazzati sulla visuale tra noi e queste regioni, e tali tragitti avrebbero causato delle minime differenze nella temperatura del fondo diffuso cosmico, da punto a punto.

L'analisi dettagliata di tali fluttuazioni – resa possibile solo dopo il 1992, grazie alle osservazioni del satellite COBE, e perfezionata in seguito con intense ricerche osservative – costituisce una preziosa miniera di informazioni sulla geometria e sul contenuto materiale dell'Universo. Ma anche la topologia dello spazio deve in qualche modo essere codificata nella radiazione cosmica. Questa radiazione a microonde che ci raggiunge da tutte le direzioni del cielo può essere appunto considerata l'immagine di una regione dell'Universo la cui dimensione era di 10 milioni di anni luce (la grandezza dell'orizzonte cosmologico all'epoca in cui questa radiazione è stata emessa). Se lo spazio multiconnesso avesse una dimensione *L* inferiore a detto valore, la radiazione fossile si presenterebbe oggi sotto forma di un complesso mosaico, composto da immagini giustapposte dell'Universo primordiale.

Vari ricercatori hanno cercato di mostrare come i dati ricavati dal satellite COBE imponessero dei vincoli di taglia a un piccolo Universo spiegazzato, per il semplice fatto che nessun mosaico particolare si manifesta in maniera evidente. Nel 1995 George Smoot (uno dei principali ispiratori del programma COBE), insieme con i suoi collaboratori, ha calcolato le fluttua-

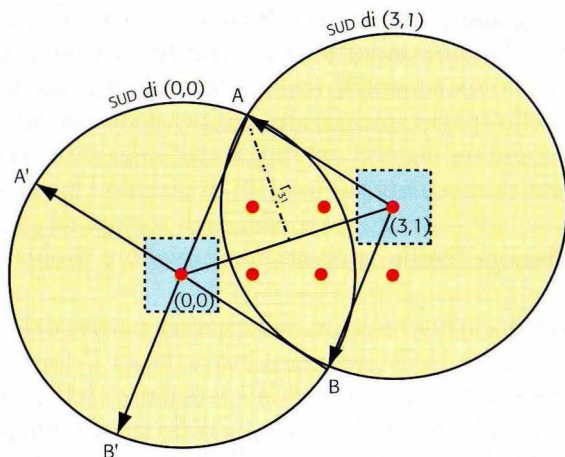
zioni di temperatura che sarebbero prodotte in un universo di topologia torica, e ha constatato che queste fluttuazioni mancavano nei dati sperimentali. Ne ha concluso, forse un po' troppo rapidamente, che la cellula cubica fondamentale dello spazio non poteva essere in alcun modo più piccola dell'orizzonte – cosa che, evidentemente, avrebbe limitato l'interesse dei modelli multiconnessi.

Tuttavia, le analisi di Smoot e collaboratori hanno tenuto conto soltanto delle topologie euclidee più semplici (unicamente ipertori), e non si applicano affatto agli universi sferici e a quelli iperbolici. Anche nel caso euclideo la portata dei loro risultati è limitata dalle ipotesi preliminari fatte sull'origine delle fluttuazioni, dall'assenza di costante cosmologica e dal modo in cui hanno condotto l'analisi statistica. Comunque sia, il solo vincolo sperimentale realmente credibile circa il raggio minimo dello spazio spiegazzato, indipendente da ogni ipotesi, non supera un decimo del raggio dell'orizzonte. Vi è dunque libertà di speculare sui modelli di piccolo Universo spiegazzato, euclidei, sferici, iperbolici, e di sottoporli alla prova della radiazione fossile osservata a una migliore risoluzione.

Un approccio interessante, sviluppato a partire dal 1996 da David Spergel e Neil Cornish (Università di Princeton), da Glenn Starkman (Cleveland) e dal matematico Jeffrey Weeks, consiste nel determinare la topologia dello spazio tramite la ricerca di correlazioni particolari nelle fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile.

I fotoni di questa radiazione hanno viaggiato in tutte le direzioni possibili dello spazio, e sono pertanto distribuiti in maniera uniforme. Concentriamoci sui fotoni che arrivano *qui* e *ora*. Hanno cominciato a viaggiare approssimativamente al tempo (ricombinazione) in cui il plasma opaco primordiale si è condensato in un gas trasparente. Dato che la velocità della luce nel vuoto è costante, sono partiti tutti all'incirca alla stessa distanza spazio-temporale dalla Terra (che, all'epoca, era ancora nel limbo). Il luogo di partenza dei fotoni della radiazione fossile forma così una sfera detta "superficie di ultima

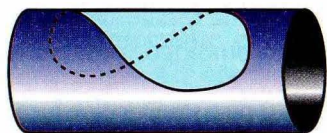
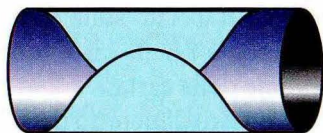
diffusione", centrata sull'osservatore, nel nostro caso la Terra (vedi figura 21.1).

Consideriamo due vedute differenti dell'Universo: l'una presa dalla Terra, l'altra da una galassia lontana. Qualsiasi astronomo extraterrestre che vivesse in questa galassia lontana vedrebbe una superficie di ultima diffusione diversa dalla nostra (figura 21.3). Ovviamente, la sua mappa del fondo diffuso cosmico avrebbe la temperatura media di 2,728 K (riflesso della temperatura dell'intero Universo), ma l'andamento delle fluttuazioni intorno a questa media sarebbe diverso, nel senso che le macchie calde e le macchie fredde non sarebbero

21.3 Principio del metodo dei cerchi

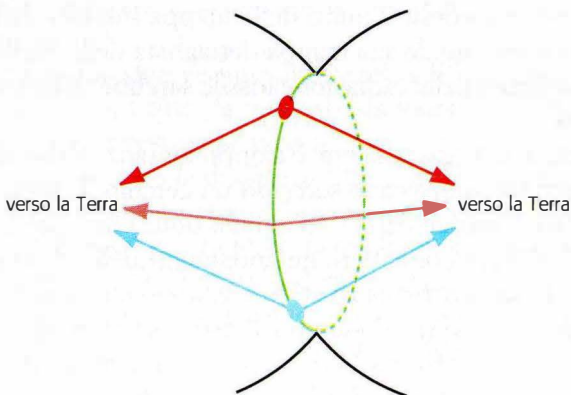
Il metodo delle coppie di cerchi è qui illustrato in uno spazio spiegazzato a due dimensioni (un toro). Il poliedro fondamentale è un quadrato (tratteggiato), tutti i punti rossi sono le copie di un medesimo osservatore. I due grandi cerchi (che sono normalmente delle sfere nello spazio a tre dimensioni) rappresentano le superficie di ultima diffusione (SUD) centrate su due copie di un medesimo osservatore. Uno è in posizione (0, 0), la sua copia è in posizione (3, 1) nello spazio di ricoprimento universale. L'intersezione dei cerchi è costituita da due punti *A* e *B* (in tre dimensioni questa intersezione è un cerchio). Gli osservatori (0, 0) e (3, 1) che vedono la coppia di punti (*A*, *B*) da due direzioni "opposte" sono equivalenti a un osservatore unico (0, 0) che vede due coppie identificate (*A*, *B*) e (*A'*, *B'*) in direzioni differenti. In tre dimensioni, le coppie di punti (*A*, *B*) e (*A'*, *B'*) formano una coppia di cerchi identificati, il cui raggio r_{31} dipende dalla grandezza del poliedro fondamentale e dalla topologia.

collocate nei medesimi punti della mappa stabilita dalla Terra. In altri termini, la sua mappa dettagliata delle fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile sarebbe differente dalla nostra.

Tuttavia, se la galassia non è troppo lontana, le due superficie sferiche si intersecano secondo un cerchio. È soltanto sul perimetro di questo cerchio di intersezione che i due osservatori vedrebbero coincidere gli andamenti delle fluttuazioni: poiché i fotoni corrispondenti provengono esattamente dallo stesso punto dello spazio-tempo, l'astronomo terrestre e quello extraterrestre otterrebbero un profilo di temperatura identico (variazioni intorno al valore della media, la cui ampiezza non supera un centomillesimo). Ahimè, a meno di non poter scambiare messaggi con questo extraterrestre, la concordanza di misure lungo un modesto cerchio comune non ha per noi alcun interesse.

Ma... se questa galassia lontana non fosse che un fantasma della nostra propria galassia, entro uno spazio spiegazzato più piccolo del raggio della superficie di ultima diffusione? Allora, quello che è un cerchio unico, visto da due osservatori differenti, equivale a due cerchi, visti dalla Terra in direzioni differenti da un unico osservatore. La nostra superficie di ultima

(a)

(b)

21.4 Autointersezione della superficie di ultima diffusione

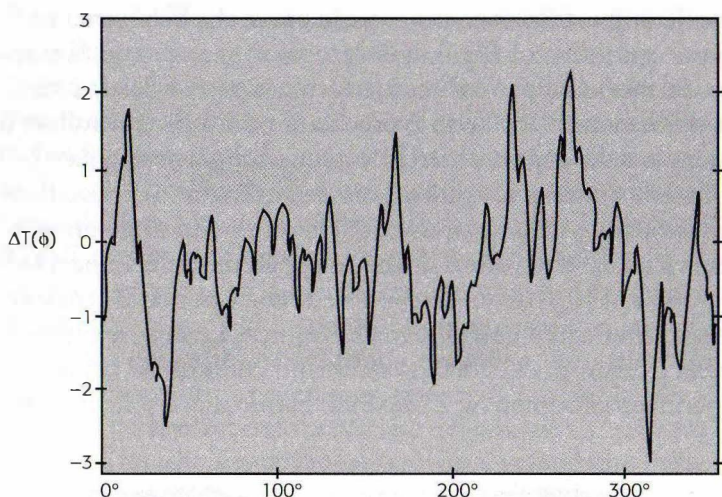
Perché un osservatore possa vedere coppie di cerchi identificati nella radiazione fossile occorre che la superficie di ultima diffusione sia sufficientemente grande rispetto alla taglia del poliedro fondamentale. In questo esempio di universo cilindrico a due dimensioni il disco di carta rappresenta la superficie di ultima diffusione. In (a) il perimetro del cilindro è maggiore del disco, di modo che quest'ultimo non si autointerseca: l'osservatore non vedrà alcuna coppia di cerchi. In (b) il disco avvolge completamente il cilindro e si accavalla su se stesso: l'osservatore vedrà la superficie di ultima diffusione autointersecarsi sotto forma di coppie di cerchi.

21.5 Cerchi omologhi

Se la superficie di ultima diffusione avvolge l'Universo, si autointerseca. Il cerchio di intersezione è visibile dalla Terra in due direzioni differenti, sotto forma di una coppia di cerchi omologhi. La temperatura varia leggermente lungo il cerchio di intersezione, ora più fredda (zona blu), ora più calda (zona rossa). I fotoni corrispondenti sono leggermente meno (raggi blu) o più energetici (raggi rossi) rispetto alla loro energia media (raggi arancione).

diffusione si ripete nella trama cristallina dell'Universo, e dunque si interseca essa stessa più volte! I cerchi di autointersezione devono apparire a coppie, in due direzioni differenti del cielo. Le fluttuazioni di temperatura misurate lungo un cerchio tracciato sulla carta della radiazione fossile saranno identiche a quelle viste lungo il cerchio omologo, in un'altra regione della carta.

È questo il metodo delle coppie di cerchi correlati.

L'andamento delle coppie di cerchi omologhi varia a seconda della topologia. Il diametro angolare di ciascuna coppia di cerchi è fissato dalla distanza tra le immagini. Quelle che sono distanti da noi più di due volte il raggio della superficie dell'ultima diffusione non produrranno coppie di cerchi (vedi figura 21.8a).

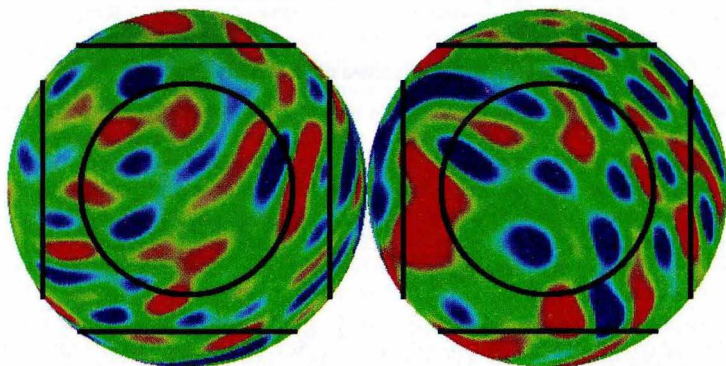
Se la superficie di ultima diffusione è grande al punto da autoaccavallarsi, non intersecherà altro che le sue immagini fantasma vicine (vedi figura 21.8b). Se essa è ancora più gran-

21.6 Grafico di temperatura di un cerchio cosmico

Lungo un qualsivoglia cerchio tracciato sulla superficie di ultima diffusione (rappresentato sull'ascissa da un angolo che varia tra 0° e 360°), la temperatura (sull'ordinata) varia di qualche milionesimo di grado intorno a un valore medio. Se questa temperatura media è la stessa per tutti i cerchi (è la temperatura della radiazione di corpo nero), il grafico della temperatura varia in maniera specifica lungo ciascun cerchio. Se due cerchi, aventi il medesimo grafico di temperatura, sono visti in direzioni differenti del cielo, formano necessariamente una coppia di cerchi omologhi entro uno spazio spiegazzato.

de, ne intercetterà di più (figura 21.8c). Anzi, per poco che sia sufficientemente grande, si potrebbero osservare centinaia, anzi migliaia di coppie di cerchi omologhi.

Inoltre, il motivo formato dai cerchi nel cielo rivela la topologia dell'Universo. Per esempio, se si osservano cerchi come quelli delle figure 21.8b e 21.8c, se ne può inferire che l'Universo sia un ipertoro; se i cerchi somigliano a quelli della figura 21.9, l'Universo deve essere lo spazio icosaedrico della figura 14.7; e così via. Nella pratica, il motivo sarà verosimilmente più complicato che nelle illustrazioni, ma valgono gli stessi principi: le posizioni relative dei cerchi omologhi sono una segnatura della topologia dell'Universo.

Basta così trovare coppie di cerchi omologhi nella superfi-

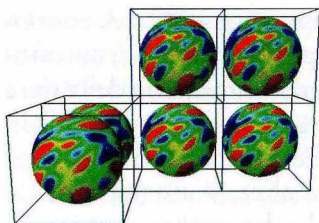
cie di ultima diffusione per avere la prova che l'Universo sia finito e spiegazzato! Per il momento, sfortunatamente, la mappa del fondo diffuso cosmico, costruita a partire dai dati forniti da COBE nel 1992, non è precisa al punto da controllare il metodo delle coppie di cerchi. La sua risoluzione angolare è di 10 gradi, e ciò significa che i dati non permettono di descrivere la variazione della temperatura tra due punti angolarmente più vicini di venti volte il diametro apparente della Luna. D'altra parte, il 30% di quello che si vede corrisponde ai "rumori" degli strumenti e non al segnale cosmico. Le misure ottenute nella primavera del 2000 da strumenti collocati su palloni (esperimenti Boomerang e Maxima) hanno una risoluzione an-

21.7 Identificazione di cerchi tramite la curva delle loro temperature

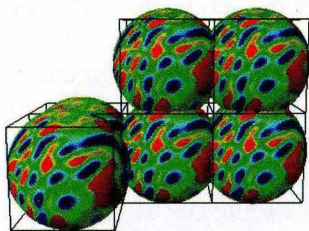
I satelliti WMAP e Planck forniranno i dati del fondo a microonde sotto forma di una mappa di temperature assai precise del fondo del cielo – rappresentate qui sotto forma di un emisfero occidentale e di un emisfero orientale. Le regioni più calde sono in rosso, quelle più fredde in blù (lo scarto massimo tra questi due estremi non supera 0,00001 gradi!). Se lo spazio è un ipertoro, e se la superficie di diffusione ultima è tanto grande da avvolgerlo completamente in tutte le direzioni, si osserveranno coppie di cerchi omologhi (in nero). I cerchi omologhi sono caratterizzati da temperature uguali nei punti corrispondenti. Seguite con il vostro indice sinistro il cerchio centrale dell'emisfero occidentale, girando in senso orario e partendo dalla posizione a ore 12. Simultaneamente, seguite con il vostro indice destro il cerchio centrale dell'emisfero orientale, girando in senso inverso. Passerete per le stesse temperature nei punti corrispondenti.
La ricerca di cerchi omologhi nell'Universo reale sarà resa complicata da diverse sorgenti di rumore, le quali sono state omesse in questa semplice illustrazione.

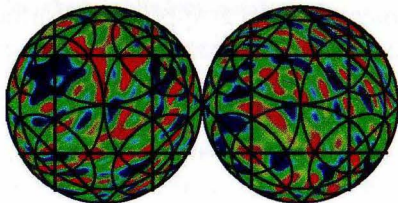
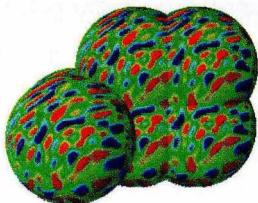
golare molto migliore e hanno appunto consentito di restringere la forchetta dei valori possibili per i parametri di curvatura. Ma essi non coprono che una piccolissima parte della sfera celeste e non possono pertanto essere utilizzati per controllare la topologia globale dell'Universo. Per sperare di trovare coppie di cerchi omologhi bisognerà analizzare attentamente le mappe della radiazione a microonde che saranno fornite nel corso di questo decennio dai satelliti WMAP e Planck.

Ma se davvero i dati futuri dei satelliti WMAP e Planck rivelassero cerchi omologhi, come potremmo essere certi della correttezza dei risultati? Potrebbe esservi un errore nel cablaggio del satellite; i programmi informatici utilizzati per analizzare i dati potrebbero contenere dei seri bachi... Per fortuna, le informazioni raccolte saranno assai ridondanti. Basteranno i primi grandi cerchi per determinare completamente la topologia dello spazio e per predire la posizione e l'orientazione di tutte le altre coppie! Questo perché, in termini geometrici, i luoghi delle immagini più vicine della nostra galassia definiscono la struttura dell'intero "cristallo cosmico".

Come convertire la lista delle coppie di cerchi omologhi in una descrizione esplicita della topologia dell'Universo? Jeffrey Weeks ha trovato la risposta.

Le coppie di cerchi danno direttamente la posizione di coppie di facce omologhe del dominio fondamentale. Ricordiamo che la topologia è definita dal dato del poliedro fondamentale e del gruppo di trasformazioni che identifica le facce. Supponiamo, dunque, di essere in un piccolo spazio spiegazzato. Immaginiamo un pallone sferico immenso, il cui centro resti fissato sulla nostra galassia e il cui raggio cresca senza discontinuità. Il pallone finisce per abbracciare l'intero spazio e per autointersecarsi. Malgrado ciò, lasciamolo gonfiare e vediamolo premere contro se stesso, proprio come farebbero i palloni reali, formando intersezioni di più piani. Quando avrà interamente riempito l'Universo, avrà preso la forma di un poliedro. Le facce di questo poliedro saranno identificate a coppie per dare lo spazio reale.

21.8a Un universo ipertorico "grande"

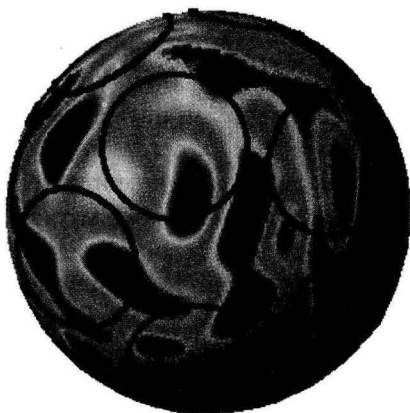
Lo spazio è un ipertoro, ma il suo poliedro fondamentale è maggiore della superficie di ultima diffusione (schema a sinistra). La superficie di ultima diffusione non si autointerseca, nessuna coppia di cerchi appare nelle mappe della radiazione fossile (presentate a destra sotto forma di due emisferi).

21.8b Un universo ipertorico "mediamente piccolo"

Lo spazio è un ipertoro, ma il suo poliedro fondamentale è leggermente più piccolo della superficie di ultima diffusione (schema a sinistra). Questa è tanto grande da fare il giro dello spazio in ciascuna direzione e autointersecarsi: si osserveranno tre coppie di cerchi omologhi (in nero nelle mappe a destra). Ciascun cerchio corrisponde a quello che gli è direttamente opposto.

21.8c Un universo ipertorico "molto piccolo"

Lo spazio è sempre un ipertoro, ma il poliedro fondamentale è molto più piccolo della superficie di ultima diffusione (schema a sinistra). Quest'ultima si accavalla su se stessa numerose volte, e si osserverà un gran numero di coppie di cerchi omologhi (in nero nelle mappe a destra).

Si può così ricostruire il dominio fondamentale a partire dalla lista di coppie di cerchi omologhi. Ciascuna faccia del dominio fondamentale si trova esattamente a metà strada tra il suo centro (nostra galassia) e un'immagine fantasma di tale centro. Abbiamo visto che ogni cerchio nel cielo si trova anche esattamente a metà strada tra il centro della superficie di ultima diffusione (nostra galassia) e qualsivoglia altra immagine fantasma di tale centro. In tal modo, i piani dei cerchi coincidono con le facce del poligono fondamentale! Una volta ottenuto il poliedro fondamentale, le disposizioni relative delle coppie di cerchi omologhi consentiranno di individuare le olonomie che le identificano.

Come nel caso della cristallografia cosmica, il metodo delle coppie di cerchi può condurre a un interessante rovesciamento nella storia della cosmologia: una volta determinata, la topologia consente di fissare la curvatura e gli altri parametri cosmologici. Di fatto, il "teorema di rigidità" implica che una data topologia abbia un certo volume, misurato in unità del raggio di curvatura; se conosciamo la topologia e la grandezza angolare dei cerchi omologhi, otteniamo una determinazione del raggio della superficie di ultima diffusione in unità del raggio di curvatura. Ecco fornita una misura indipendente del parametro di densità – una misura che non dipende da alcuna ipotesi circa la natura delle fluttuazioni primordiali.

Dopo aver determinato la topologia dell'Universo, possiamo procedere all'inverso e ricostruire la temperatura dei fotoni della radiazione fossile con le sue fluttuazioni di temperatura integrate e confrontate con quelle dell'universo osservato localmente. Dovremmo allora essere in grado di determinare direttamente quale macchia del fondo diffuso cosmico si sia disgregata per diventare il nostro proprio superammasso Virgo, oppure altre strutture familiari come la Grande Muraglia. In uno spazio non spiegazzato, i cosmologi sono abituati a pensare che osservando l'universo lontano misurano la preistoria di altre regioni dell'Universo. Se l'Universo fosse spiegazzato, noi vedremmo anche la nostra *propria* origine.

21.9 Cerchi omologhi in un universo icosaedrico

Se i cerchi omologhi formano un motivo icosaedrico, l'Universo deve essere a sua volta rappresentato da uno spazio icosaedrico come quello della figura 14.6 (spazio di Best). Nel caso di una topologia più complicata, anche i motivi circolari saranno più complicati. Comunque sia, la disposizione relativa delle coppie di cerchi rivelerà la topologia dell'Universo.

Lo studio della radiazione fossile negli spazi iperbolici e in quelli sferici è molto più ricco, ma anche molto più difficile da trattare, rispetto alle topologie euclidee. Mentre si distinguono soltanto dieci topologie a geometria "piatta" e di volume finito (di cui solo sei sono orientabili), esiste un'infinità di spazi a curvatura positiva o negativa, e di essi i matematici hanno già dato migliaia di esempi, così piccoli da stare interamente entro la superficie di ultima diffusione.

Molti degli spazi iperbolici compatti possono essere studiati matematicamente grazie al geniale programma informatico, SnapPea, sviluppato da Jeffrey Weeks. Questo originale matematico si è ritirato ben presto dalla vita accademica, per concentrarsi in ricerche altamente astratte, circondato solo dalla famiglia. Per sbarcare il lunario, si dedica a un'attività più concreta, anche se comunque ludica, che lo distoglie dai suoi argomenti prediletti: inventa *software* per giochi che funzionano in spazi multiconnessi. Se un giorno avrete l'occasione di

giocare al Morpion, agli scacchi o alle parole incrociate su un nastro di Möbius o su un toro, è a Jeffrey Weeks che dovrete il vostro mal di testa! Il programma SnapPea è liberamente disponibile su Internet.[1] Che cosa significa questo strano nome? Lo stesso autore confessa che non gli veniva l'ispirazione per battezzare il suo programma; si era rivolto così alla moglie chiedendole se per caso avesse un'idea. Poiché in quel momento ella era intenta a sgusciare piselli, gli rispose semplicemente: "Non hai che da chiamarlo SnapPea!".

1. All'indirizzo www.northnet.org/weeks. Attenzione, il programma è solo per specialisti.

22

L'INFINITO, L'INFLAZIONE E LO *CHIFFON*

> Quello che scrivo in questo momento in una segreta, l'ho scritto e lo scriverò per l'eternità, su un tavolo, con una penna, sugli abiti, in tutte le circostanze simili. Così di ciascuno.
>
> LOUIS-AUGUSTE BLANQUI

Un'ipotesi scientifica non dà risultati senza il supporto e la protezione di una realtà oggettiva. Abbiamo visto che il modello di un Universo *chiffonné*, spiegazzato, è compatibile con i dati, e nulla più. A oggi, nessuna evidenza osservativa si è rivelata decisiva. Vi sono argomenti di altra natura che possono confortare questa ipotesi o, al contrario, renderla meno verosimile? Come diceva anche Epicuro, ogni concezione del mondo ha origine nella "meraviglia della filosofia". Pesiamo dunque i pro e i contro, servendoci di un'argomentazione essenzialmente filosofica.

Con una topologia multiconnessa, la forma dello spazio appare legata solo in parte alla questione della gravità. Che la quantità di materia determini soltanto la curvatura dello spazio-tempo, e non la sua forma o la sua qualità, ci fa ritrovare la distinzione classica in filosofia tra quantità e forma, cara per esempio a Leibniz.

La diversità dei modelli multiconnessi è molto maggiore di quella dei modelli monoconnessi. Tale ricchezza teorica non rappresenta la garanzia che la descrizione del mondo fisico

sia più verosimile; le topologie multiconnesse hanno il vantaggio di offrire modelli di Universo spazialmente finito, indipendentemente dalla curvatura. La fisica non impedisce di considerare nozioni che coinvolgano l'infinito, ma per comodità non accorda loro alcuna esistenza reale; ritiene che le sole entità effettivamente date e i soli processi effettivamente eseguibili siano finiti. I fisici, pertanto, cercano in genere di eliminare gli infiniti che derivano dalle loro teorie.[1]

Quanto alla cosmologia, ammettiamo per esempio l'ipotesi comunemente accettata che la topologia dell'Universo sia monoconnessa e che lo spazio sia iperbolico o, al limite, "piatto". L'Universo fisico, in questo caso identico al suo spazio di ricoprimento universale, è dunque infinito. A tali condizioni, la frazione dell'Universo che risulta osservabile è nulla, poiché l'universo osservabile è finito, e ogni numero finito diviso per l'infinito dà zero! L'ipotesi cosmologica standard implica pure che la massa dell'Universo sia infinita: per il principio di omogeneità, la densità di materia deve essere costante nello spazio e, per quanto infima sia in ciascun centimetro cubo, integrata su un volume infinito, porta a una massa universale infinita.

Queste due conseguenze sono alquanto imbarazzanti, e da più di un punto di vista. Anzitutto, sul piano epistemologico, si porrebbe un serio problema di credibilità per la cosmologia in quanto disciplina scientifica: come giustificare l'estrapolazione da una frazione infinitesimale – quella che osserviamo – alla descrizione dell'intero Universo fisico? Non avrebbe alcun senso applicare i parametri di curvatura dell'Universo a domini infinitamente grandi rispetto alle regioni nelle quali sono stati effettivamente misurati!

Quanto poi al piano fisico, tutti gli oggetti che conosciamo – particelle, fotoni, alberi, animali, pianeti, galassie, ecc. – hanno masse finite. Se l'Universo è un oggetto fisico, perché mai avrebbe massa infinita?

1. Vedi J.-P. Luminet, M. Lachièze-Rey, *La Physique et l'infini*, Flammarion, Paris 1994.

Sul piano filosofico l'infinito cosmico solleva un paradosso la cui origine risale alla dottrina atomistica del V secolo a.C.: la pluralità dei mondi e degli esseri viventi. Fu un celebre agitatore politico, Louis-Auguste Blanqui, a formularlo nel modo più incisivo. Destinato a passare più di trent'anni rinchiuso in varie prigioni, scrive nel 1871, durante una delle sue incarcerazioni, un opuscolo intitolato *L'eternità degli astri: ipotesi astronomica*, in cui espone le riflessioni filosofiche che gli hanno ispirato l'ipotesi dell'infinità dell'Universo. Per prima, la limitazione delle combinazioni differenziate della materia. Non vi è che un centinaio di corpi semplici, gli atomi, a partire dai quali è costituito ogni sistema materiale. Malgrado l'incalcolabile numero delle loro combinazioni, il risultato è necessariamente finito, al pari di quello degli elementi. Sicché, "per riempire l'estensione", la natura deve ripetere all'infinito ciascuna delle sue combinazioni originali. Blanqui può trarne le conseguenze logiche più implacabili:

> I corpi celesti sono così classificati per originali e copie. Gli originali: è l'insieme dei globi che formano ciascuno un tipo speciale. Le copie: sono le ripetizioni, esemplari o prove di questo tipo. Il numero di tipi originali è limitato, quello delle copie o ripetizioni infinito. Ciascun tipo ha dietro di sé un'armata di sosia il cui numero è senza limite. [...] Ne segue che ogni terra, contenente una di queste collettività umane particolari, risultato di incessanti modificazioni, deve ripetersi miliardi di volte per fare fronte alle necessità dell'infinito. Da qui miliardi di terre, assolutamente simili, per persone e materie, dove nulla cambia, per tempo o spazio, né di un millesimo di secondo, né di una ragnatela. [...] Così, per la grazia del suo pianeta, ciascun essere umano possiede un numero senza fine di doppioni che vivono la sua vita, proprio come la vive lui. È infinito ed eterno nella persona di altri se stesso, rispetto non solo all'età di quel momento, ma a tutte le sue età. Ha simultaneamente, in ciascun secondo presente, miliardi di sosia che nascono, altrettanti che muoiono, e altrettanti la cui età è scaglionata, secondo per secondo, dalla sua nascita alla sua morte.

Blanqui invoca l'infinito dello spazio e l'eternità del tempo implicati dalla cosmologia newtoniana per sostenere che l'eternità mette in scena imperturbabilmente, all'infinito, le stesse rappresentazioni. Queste riedizioni monotone di migliaia di terre simili e la vanità di ogni pretesa novità appaiono ancor più bizzarre in quanto sono affermate da uno che voleva cambiare la storia.

Che valore ha questa argomentazione un secolo dopo, alla luce della cosmologia relativistica, della genetica e della teoria dell'evoluzione? È vero che, se lo spazio è infinito e omogeneo, vi è un numero infinito di stelle e di galassie nell'Universo. Del resto, sempre nel quadro relativistico, i modelli d'universo a spazio infinito sono necessariamente in espansione perpetua; evolvono dunque in una prospettiva temporale infinita. Quanto agli elementi "semplici", costitutivi della materia, le particelle elementari (quark, leptoni, ecc.) hanno rimpiazzato gli atomi, ma il numero delle loro specie distinte è ancora più ridotto di quello degli atomi. Se si pensa poi alla genetica, lo schema di organizzazione della vita terrena è organizzato dalle molecole del DNA, che hanno una taglia massima finita, e per le quali vi è un numero finito, per quanto assai grande, di configurazioni possibili. Tutte le condizioni invocate da Blanqui sembrano ora riunite per portare a conclusioni identiche alle sue. Essendo i pianeti in numero infinito nello spazio e nel tempo, ci si deve aspettare che, almeno su uno di essi, esista un essere la cui struttura genetica sia esattamente identica a quella dell'autore di *questo volume*, ossia un altro Jean-Pierre Luminet, con tutti i neuroni esattamente nel medesimo stato, vale a dire con tutti i miei ricordi, tutti i miei pensieri, tutti i miei gesti del momento. Analoga sorte attende al varco anche i lettori di *questo libro*!

Da un lato, si può vedere in tutto ciò un paradosso filosoficamente inaccettabile: che pensare delle nozioni di identità, libertà, ecc.? Dall'altro, è lecito restare scettici di fronte al ragionamento. E *primo*, ribattere che non basta che una collezione di oggetti sia infinita per contenere *tutti* gli oggetti; *secondo*, sottolineare che l'ipotesi di duplicazione degli esseri

sarebbe forse accettabile in un Universo eterno e *stazionario*, in cui le proprietà fisiche medie non evolvono nel corso del tempo, ma che la teoria stazionaria è stata rigettata: l'Universo evolve fortemente, come attesta l'osservazione della radiazione fossile. Le condizioni fisiche del Big Bang sono radicalmente differenti da quelle che regnano oggi, le quali sono radicalmente differenti da quelle che regneranno tra mille miliardi di anni... Le configurazioni dei sistemi fisici non sono dunque equiprobabili nel tempo. Sul piano genetico, anche la teoria dell'evoluzione sembra bloccare ogni riferimento a considerazioni probabilistiche: tutti gli eventi non sono equiprobabili, poiché hanno una storia.

Sì, ma... L'infinito spaziale e l'ipotesi di omogeneità bastano all'argomentazione di Blanqui: in ogni dato istante della storia cosmica, le configurazioni che si ripetono entro lo spazio infinito hanno avuto gli stessi antecedenti storici; ciascuna deve essersi dunque costituita un numero incommensurabile di volte nelle varie regioni dello spazio. Si può ancora obiettare che quello che conta è l'interno dell'universo osservabile, delimitato da una sfera di quattordici miliardi di anni luce, il cui raggio è centrato su di noi, e che questa sfera è così piccola e il numero di configurazioni che conducono alla costituzione di un individuo così grande che non è possibile alcun doppione.

Ciò non toglie... Il modo più semplice di regolare la questione è supporre che il volume dello spazio sia... finito! Ora, solo le cosmologie relativistiche multiconnesse offrono modelli finiti, indipendentemente dalla curvatura dello spazio. Certo, le immagini fantasma inerenti ai modelli d'Universo spiegazzato richiamano alla mente le "terre sosia" di Blanqui; ma vi è una differenza fondamentale: questi sosia sono una e una sola Terra, vista a istanti differenti della sua storia, e sono in numero finito, poiché la storia passata è limitata dal Big Bang. Non vi è più alcun paradosso filosofico.

Contro l'idea di uno spazio multiconnesso possono essere sollevate due obiezioni – quelle che peraltro mi vengono si-

stematicamente rivolte a ogni mia conferenza! La prima è di natura fisica, e riguarda un'eventuale incompatibilità con l'inflazione. La seconda è di natura filosofica, ed è legata alla stretta applicazione del principio di semplicità. Esaminiamole una per una.

La prima invoca la teoria dell'inflazione, che conserva il favore di numerosi cosmologi per la spiegazione della formazione di grandi strutture. Tale teoria implica che lo spazio, una frazione di secondo dopo la sua nascita, si sarebbe gonfiato in maniera smisurata in un brevissimo periodo. Anche se lo spazio fosse curvo all'inizio della sua storia, questo eccessivo gonfiamento l'avrebbe reso inevitabilmente euclideo. Non vi è alcuna incompatibilità tra i modelli inflazionistici e l'ipotesi di un universo spiegazzato: lo spazio può essere "piatto" e insieme spiegazzato, poiché, come abbiamo visto, esistono diciassette forme di spazi euclidei multiconnessi! Di contro, l'inflazione compromette definitivamente l'osservazione di un eventuale universo spiegazzato: se il processo di dilatazione frenetica ha avuto realmente luogo, non ha cambiato la topologia dell'Universo, ma ha enormemente dilatato il volume dell'universo osservabile. Dunque, anche se lo spazio fosse spiegazzato, lo sarebbe a una scala troppo grande per essere rilevato.

Il credo dei fisici è che bisogna preferire le teorie che fanno predizioni estremamente solide a quelle che non potranno mai essere escluse. Anzi, se le predizioni non sono controllabili empiricamente, non abbiamo alcun mezzo per mostrare che la teoria è falsa. Alcuni ritengono che la teoria di un universo spiegazzato rientri tra quelle che non potranno mai essere totalmente escluse, poiché non farebbe predizioni precise. Al contrario, citano la teoria dell'inflazione come modello esemplare di teoria falsificabile. L'argomento è, però, capzioso, e per due ragioni. La prima è che se lo spiegazzamento dello spazio ha luogo a una scala inferiore a quella dell'orizzonte, la teoria è perfettamente controllabile tramite i metodi della cristallografia cosmica o quello delle coppie di cerchi correlati nella radiazione fossile; la maggior

parte delle ricerche attuali in topologia cosmica verte proprio sui perfezionamenti dei controlli osservativi. La seconda ragione è che la teoria dell'inflazione fa una predizione *talmente* precisa che non potrà *mai* essere controllata. Non si potrà mai dire che lo spazio sia esattamente piatto, poiché per farlo occorrerebbero risultati di una precisione infinita, e questo è impossibile… [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**]

Passiamo alla seconda obiezione. Il principio di semplicità ci dice che, in un insieme di modelli esplicativi dei fatti, la preferenza andrebbe data a quello che fa appello a un numero minore di ipotesi. I parametri topologici (natura del poliedro fondamentale, composizione del gruppo di olonomia) introducono fattori supplementari nei modelli cosmologici standard. A prima vista, è dunque saggio optare per la topologia monoconnessa, tanto più che i modelli corrispondenti sono più facili da trattare. Ma supporre solo per questo che le teorie più maneggevoli abbiano più possibilità d'essere vere delle altre significa assumere un'ipotesi metafisica sulla semplicità della Natura, senza precisare in maniera oggettiva cosa possa essere un grado di semplicità.

L'applicazione del principio di semplicità è delicata, in quanto ogni fenomeno ancora sconosciuto potrebbe essere fonte di parametri "naturali" supplementari. La nozione di semplicità, pertanto, è relativa a uno stato di conoscenze in un momento determinato. Bisogna, per esempio, preferire i modelli d'Universo senza costante cosmologica a quelli che ne hanno una? Introdotta da Einstein per una ragione che doveva rivelarsi errata (forzare i modelli relativistici a restare statici), tale costante cosmologica è apparsa in seguito superflua, al punto che per decenni solo le soluzioni che non la contemplavano hanno attirato l'attenzione dei ricercatori. Ma, alla luce degli sviluppi più recenti, teorici e osservativi, le cose sono rapidamente cambiate. La costante cosmologica appare una necessità fondamentale della teoria quantistica e sembra confermata dai dati osservativi. Necessità e opportunismo fanno legge: [▶ **p. 277, La repulsione cosmica**] se occorre una costante cosmologica per rendere coerenti i nostri

modelli d'universo, non è più "semplice" supporre che essa esista? Ecco un esempio in cui l'applicazione stretta del principio di semplicità si è rivelata infruttuosa, finendo addirittura per ostacolare lo sviluppo della disciplina.

Analogamente, se i parametri topologici dovessero essere richiesti da una teoria fisica più profonda della relatività generale, l'argomento della semplicità a sostegno di una topologia monoconnessa perderebbe di valore.

Vi sono nuovi approcci allo spazio-tempo che inducono a pensare che il carattere finito del volume spaziale potrebbe rappresentare una condizione indispensabile per la costruzione di modelli d'universo coerenti. La cosmologia quantistica, che appunto mira a descrivere la dinamica dell'Universo alla scala quantistica, è uno di questi. Proposta negli anni Sessanta del Novecento da John Wheeler e da Bryce de Witt, essa non può essere messa all'opera se non in situazioni estremamente semplificate, indagate in particolare da Jim Hartle, Stephen Hawking, Andrej Linde e Aleksandr Vilenkin. Nello scenario del "multiverso" [▶ **p. 49, Schiuma, stringhe e fili**] o di universi-bolle multipli scaturenti spontaneamente dalle fluttuazioni del vuoto quantistico, è possibile calcolare la probabilità che appaia un universo avente questa o quella caratteristica, ricorrendo a ipotesi semplificatrici. Tali calcoli privilegiano gli spazi di volume minore. Ora, uno spazio euclideo o iperbolico ha volume finito solo se la sua topologia è multiconnessa.

In questa nuova interpretazione, l'argomento della semplicità finisce per deporre a favore dell'ipotesi di un universo spiegazzato! Le soluzioni multiconnesse diventano "naturali", nel senso che discendono logicamente dal modello, a differenza di un'ipotesi aggiuntiva. Il carattere naturale di un modello non è la migliore garanzia di semplicità? A lungo si è creduto che lo spazio naturale fosse lo spazio tridimensionale euclideo monoconnesso; la relatività generale ci ha insegnato che lo spazio-tempo è incurvato dalla gravità. La cosmologia quantistica potrebbe mostrarci che lo spazio deve essere "naturalmente" spiegazzato e di piccolo volume!

Tuttavia, una riserva va dichiarata circa questo ragionamento: esso vale per quanto valgono i modelli di cosmologia quantistica sui quali si basa. Non dobbiamo dimenticare che non disponiamo ancora di una teoria in grado di calcolare in maniera affidabile la probabilità che l'Universo possegga questa o quella configurazione.[2]

2. La stessa riserva deve valere per tutti quei discorsi cosmologici che pretendono che la probabilità della comparsa della vita nell'Universo sia nulla rispetto all'insieme di tutte le condizioni iniziali possibili all'istante del Big Bang. Una visione teleologica è spesso il risultato inatteso di ragionamenti del genere; infatti, si dice, poiché la vita esiste nell'Universo (almeno qui, sulla Terra), pur essendo altamente improbabile sul piano fisico, essa deve essere stata programmata da una Volontà superiore che ha disposto in maniera precisa le condizioni iniziali dell'Universo in modo da consentire la nascita del genere umano. Questa interpretazione metafisica della cosmologia relativistica è chiamata "principio antropico forte". Per un'eccellente opera critica sull'argomento vedi J. Demaret, D. Lambert, *Le Principe anthropique*, Armand Colin, Paris 1994.

23

MAYA

> No, non posso credere che gli astri siano così lontani: miliardi di anni luce, ciò non vuol dire nulla. Prima o poi si scoprirà che sono molto più vicini, e tutto quello che ci appariva infinito, immenso, diventerà piccolo e vicino.
>
> NINA BERBEROVA

Non c'è conferenza di cosmologia senza che, nel corso del dibattito, qualcuno dal pubblico finisca per chiedere: "E Dio in tutto questo?". In genere, la gente si aspetta dallo scienziato una risposta, o almeno è curiosa di sapere se il conferenziere sia credente o meno. Nella maggior parte dei casi, costui si defila citando la celebre battuta rivolta dal marchese Pierre-Simon de Laplace a Napoleone: "Sire, non ho avuto bisogno di questa ipotesi".

Non si tratta di una dichiarazione di ateismo, bensì del semplice riconoscimento che questo tipo di domande esula dalla scienza. La cosmologia "si accontenta" di ricostruire gli eventi presenti e passati della storia cosmica a partire da osservazioni, esperimenti di laboratorio e modelli teorici ritenuti meglio rappresentare l'Universo. Nel quadro dei modelli del Big Bang, essa cerca di avvicinarsi sempre di più alle condizioni che avrebbero presieduto alla "comparsa" dello spazio, del tempo e della materia a partire da un preteso evento estrapolato nel passato, appunto il Big Bang. La sua natura matemati-

ca – quella di una singolarità in cui la curvatura dello spazio-tempo è infinita – implica che il Big Bang non appartenga alla varietà geometrica spazio-tempo. A rigore, il Big Bang *non* è un evento. Non è "accaduto", né ha "avuto luogo". Per ciò stesso sfugge necessariamente al campo delle nostre teorie!

Non si dovrebbe pertanto vedere in questo misterioso e inaccessibile Big Bang una metafora della creazione o della "mente di Dio".[1] La fisica non serve a rivelare gli attributi e le intenzioni del Creatore, ma fornisce uno strumento per comprendere e controllare la natura, al fine di dominare l'ambiente secondo i nostri desideri.

Vi è tuttavia un'autentica questione cosmologica: quella di sapere se l'Universo o la materia abbiano un'origine nel tempo; ma questo problema è spesso trasformato in modo erroneo in uno pseudoproblema circa la creazione. Tale slittamento poggia sull'idea che la creazione richieda necessariamente l'intervento di un agente esterno, una causa esterna al mondo fisico. Il modello del Big Bang e l'ipotesi di un inizio dell'Universo in un tempo finito nel passato fanno, a prima vista, pensare all'operazione di un Creatore. È su questa confusione che poggiano sia le reazioni degli avversari del modello del Big Bang, sia le derive metafisiche dei suoi sostenitori e i tentativi di mediazione dei teologi.

Storicamente, la controversia sul Big Bang ha ben presto oltrepassato il contesto scientifico vero e proprio e si è spostata sui presunti aspetti filosofici e religiosi. Aleksandr Fridman, che fu il primo a formulare in termini relativistici i concetti di Universo in espansione e di singolarità cosmica, non si è trattenuto dal vedervi conseguenze metafisiche, parlando in particolare di "creazione del mondo dal nulla". Dalla sua bibliografia generale veniamo a sapere di un manoscritto andato perduto, intitolato appunto *Creazione* (*Mirozdanie*). Non sappiamo nulla del contenuto, ma è probabile che Fridman, a suo

1. Il celebre cosmologo britannico Stephen Hawking ha dichiarato che il giorno in cui gli esseri umani avranno messo a punto una "Teoria del Tutto" conosceranno la mente di Dio.

modo credente, vi avesse sviluppato un punto di vista teologico. *A contrario*, Georges Lemaître, per così dire il secondo "inventore" del Big Bang, propugnava una radicale distinzione tra scienza e religione, poiché riteneva che non si sarebbe mai potuto ridurre l'Essere supremo al rango di un'ipotesi scientifica. Lemaître era uomo di fede, tanto che prese gli ordini, e ciò gli valse da parte di Einstein l'ingiusto sospetto di non essere obiettivo sull'argomento. Verso il 1950, in Inghilterra, i cosmologi Edward Milne e Edmund Whittaker trassero dalla cosmologia relativistica conseguenze teologiche azzardate. Il 22 novembre 1951, di fronte all'Accademia pontificia, papa Pio XII citò la teoria del Big Bang a sostegno dell'esistenza di un creatore: "Sembra in verità che la scienza odierna, risalendo di colpo milioni di secoli, sia riuscita a farsi testimone del *Fiat Lux* iniziale [...]. A quell'epoca, il cosmo è uscito dalle mani del Creatore". Fortemente avverso a simili commistioni, Lemaître dichiarò che la sua teoria "era del tutto estranea a qualsiasi questione metafisica o religiosa" (Congresso Solvay di Bruxelles, 1958). Come si può immaginare, la connotazione cristiana del Big Bang ebbe un'influenza disastrosa in Unione Sovietica. All'epoca staliniana la dottrina ufficiale sosteneva che l'Universo era infinito nello spazio e nel tempo; la cosmologia del Big Bang era bandita come riflesso di un idealismo borghese reazionario. Gli studiosi sovietici rifiutavano (prudentemente) di impegnarsi in ricerche di cosmologia.

Ancora oggi i termini impiegati da certi soloni della cosmologia internazionale sono così imprecisi da prestarsi a confusioni del genere. È per questo che una persona influente nella cultura scientifica come John Maddox, che a lungo ha diretto la rivista *Nature*, ha potuto affermare che la cosmologia del Big Bang era filosoficamente inaccettabile poiché giustificava le vedute dei creazionisti.

Come possono perpetuarsi simili fraintendimenti? La maggior parte della letteratura scientifica e filosofica sulla cosmologia confonde due questioni tra loro assai diverse. La prima: l'Universo fisico ha un'origine temporale? Se sì, che cosa ci

può dire la cosmologia fisica? La seconda: quale fu la causa esterna al Big Bang all'inizio del tempo, e che cosa può dirci la scienza al riguardo?

La prima serie di domande è scientifica (anche quando le risposte non lo sono), la seconda no. La questione della creazione è distinta da quella dell'origine. Che l'origine sia scientificamente inaccessibile non la rende per ciò stesso equivalente a una creazione divina. L'inaccessibilità dell'origine è semplicemente espressione del fatto che, come vi è un orizzonte per la nostra conoscenza osservativa, così vi è un orizzonte per la nostra conoscenza teorica. Nel 1830 il conte Pierre Daru diede prova di singolare perspicacia quando, sotto l'influenza di Laplace, suo collega all'Accademia, dominava la certezza che la scienza newtoniana fosse in grado di svelare passato, presente e futuro dell'Universo. Con un secolo d'anticipo, Daru intuì i limiti fondamentali della scienza, e i quattro suoi versi qui riportati dovrebbero essere meditati attentamente da quei fisici che oggi sono ancora convinti di essere prossimi alla soluzione dell'enigma universale:

> L'essere umano non può raggiungere la causa prima:
> Tempo, gravità, spazio, materia,
> Che lo spirito umano crede di comprendere, e non sa definire,
> Nasconderanno la loro essenza alle età future.[2]

Mescolare ricerca scientifica e indagine spirituale, fisica e tao, cosmologia e buddhismo, ecc., può anche sembrare seducente. Per coloro che si dedicano a simili operazioni in testi destinati al largo pubblico il successo è pressoché garantito, giacché "ciò che gli esseri umani vogliono, non è la conoscenza, bensì la certezza" (Bertrand Russell). L'intento di *questo volume* non è di regalare certezze di natura metafisica, bensì di porre una questione fisica: che cosa si può dire sulla forma del cosmo?

Cosmo è sinonimo di ordine e di bellezza. Al di là di questa semplice constatazione etimologica, ignoro del tutto se l'Uni-

2. P. Daru, *L'Astronomie*, canto I, 1830.

verso sia davvero bello e armonioso, e non mi sono formato alcuna convinzione al riguardo. Non è la mente che può vedere bellezza e simmetria là dove esse non sono? Non è il nostro cervello, plasmato dall'evoluzione cosmica, che seleziona nell'Universo solo quello che è atto a selezionare, e cioè unicamente regolarità? Nel XVI secolo un filosofo come Bacone scriveva: "L'intelletto umano inclina naturalmente a supporre l'esistenza nel mondo di più ordine e regolarità di quanto riesca a reperirne. E benché in natura vi siano molte cose singolari e prive di simmetria, trova loro parallelismi e relazioni che non esistono".

Ovviamente, non mi dispiacerebbe che in futuro le osservazioni ci dicessero, per esempio, che la struttura dello spazio è quella di un dodecaedro centoventi volte più piccolo del volume dell'universo osservabile (è il modello di spazio sferico di Poincaré). [▶ p. 99. **Forme affascinanti**]

Da parte mia, esercito il mestiere di ricercatore perché ritengo che il sapere sia un gioco e un piacere che rende la vita più intensa. Una delle cose che più mi dilettano consiste appunto nel meditare sul nucleo oscuro che rende l'Universo impenetrabile. Sono assillato dai limiti: buchi neri, incertezza quantistica, singolarità, miraggi cosmici. La fisica odierna ci insegna che esiste una sorta di foschia che riflette la stessa natura fisica del mondo, indipendentemente dal filtro dei nostri sensi. Nel dominio subatomico, descritto dalla fisica quantistica, il principio di incertezza (o come altri dice, di indeterminazione) illustra questo tipo di disturbo. Un oggetto quantistico, per esempio un elettrone, ha realtà soltanto se lo si misura e, inoltre, la misura modifica le sue proprietà. Sussiste pertanto un limite intrinseco alla conoscenza del mondo quantistico: il reale è velato dalla natura stessa del mondo.[3]

Al piano macroscopico, gli astrofisici hanno scoperto una foschia alla stessa scala dell'Universo, con i miraggi gravitazionali. I raggi luminosi emessi dagli astri molto lontani in-

3. Vedi B. d'Espagnat, *Un atomo di saggezza: note di un fisico sul reale velato*, tr. it. Hopefulmonster, Firenze 1987.

contrano sulla loro traiettoria verso di noi masse intermedie. Queste ultime, incurvando lo spazio nel loro intorno, perturbano i tragitti luminosi e generano illusioni ottiche che deformano, amplificano, moltiplicano le immagini delle sorgenti sullo sfondo.

Con i modelli di Universo spiegazzato, la foschia cosmica è forse globale, e non più soltanto localizzata in determinate direzioni osservative. La forma dello spazio può essere così sottile da moltiplicare pressoché all'infinito i tragitti della luce tra una sorgente lontana e noi stessi, di modo che saremmo immersi in un Universo dall'aspetto estremamente differente da ciò che esso è in realtà. Ciascuna galassia avrebbe decine di immagini fantasma distribuite in tutte le direzioni e a tutte le profondità, le quali, però, difficilmente potrebbero essere riconosciute come tali. L'Universo ci apparirebbe vasto, senza pieghe, contenente miliardi di galassie; mentre, in realtà, sarebbe più piccolo, spiegazzato, contenente molti meno oggetti autentici. Dove sarebbe l'illusione, dove la realtà?

In conclusione, mi viene in mente la parola *maya.* Questo termine sanscrito designa, nel pensiero induista, l'apparenza illusoria che non solo maschera la verità, ma provoca anche l'errore. A trent'anni dalle mie prime contemplazioni del cielo notturno di Provenza, quando ancora levo gli occhi al firmamento stellato, non vedo più la stessa cosa. Vent'anni di indagini sulla forma dello spazio hanno modificato il mio sguardo. Possiamo vedere nel cielo solo quello che siamo disposti a vedere.

PARTE SECONDA

LE PIEGHE DELL'UNIVERSO

24

UNA BREVE STORIA DELLO SPAZIO

> Quel che tace al di là di ogni cosa è semplicemente ciò che chiamo spazio?... Spazio! Un'idea! Una parola! Un soffio!
>
> JEAN TARDIEU

Spazio e tempo non sono dati *a priori*; a ogni momento della storia umana, a ogni grado di perfezionamento delle nostre teorie fisiche sull'Universo corrisponde una concezione di quelle categorie fondamentali del pensiero che sono lo spazio, il tempo, la materia. Ogni volta che ve ne è una nuova, la nostra visione dell'Universo deve adattarvisi; dobbiamo cioè accettare che il "senso comune" sia colto in fallo. Per esempio, se lo spazio è limitato da una frontiera, che cosa c'è al di là di essa? Niente? È difficile immaginare che, viaggiando sufficientemente lontano in una determinata direzione, si possa giungere a un punto oltre il quale non esisterebbe più nulla, nemmeno lo spazio. È inquietante, però, pensare anche a un Universo infinitamente grande. Quale senso avrebbe ogni cosa misurabile, cioè finita, rispetto all'infinito?

Interrogativi del genere sono emersi sin dal VI secolo a.C., nell'antica Grecia, e subito hanno innescato accese controversie. Le prime scuole di filosofi della natura (quelli che potremmo considerare gli antenati dei nostri scienziati), chiamate "presocratiche" (benché coprano un arco di due secoli e presentino forti differenze tra loro), cercano, ciascuna a suo mo-

do, di delineare una spiegazione razionale del "mondo", ossia dell'insieme formato dalla Terra e dagli astri, concepito come un sistema organizzato. Per Anassimandro, della scuola di Mileto, il mondo in cui si dispiegano i fenomeni accessibili alle nostre indagini è necessariamente finito. Esso sarebbe, però, immerso in un mezzo che lo ingloba, l'*apeiron*, che corrisponde a ciò che noi oggi consideriamo spazio. Il termine *apeiron* significa sia infinito (illimitato ed eterno) sia indefinito (indeterminato). Per Talete, pressoché contemporaneo di Anassimandro, il mezzo universale è costituito dall'acqua, sicché il mondo sarebbe una sorta di bolla emisferica galleggiante in una massa liquida infinita.

La concezione intuitiva di un mondo materiale finito, immerso in uno spazio-ricettacolo infinito, si ritrova in altri pensatori: Eraclito, Empedocle, e in particolare gli Stoici, che vi aggiungono l'idea di un mondo per così dire pulsante, che attraversa fasi di deflagrazioni e di esplosioni periodiche.

L'atomismo, fondato nel V secolo da Leucippo e da Democrito, professa una versione dell'infinito cosmico del tutto diversa. Sostiene che l'Universo sia costruito a partire da due elementi primordiali: gli atomi e il vuoto. Indivisibili e impenetrabili (*atomos* in greco significa "ciò che non può essere frantumato"), gli atomi sono eterni, e differiscono tra loro solo per grandezza e forma. Sono infiniti di numero. Tutti i corpi risultano dall'aggregazione di atomi in movimento; essendo il numero delle combinazioni infinito, ne discende che pure i corpi celesti sono in numero infinito: è la tesi della pluralità dei mondi. La formazione dei mondi avviene in un ricettacolo illimitato: il vuoto (in greco *kenon*). Questo spazio ha come unica proprietà l'essere infinito, sicché la materia non ha alcun effetto su di esso: è un assoluto, dato *a priori*.

La filosofia atomistica è stata duramente criticata da Socrate, da Platone e da Aristotele. Inoltre, affermando che l'universo non è retto da dei, bensì da elementi materiali e dal vuoto, essa non poteva non entrare in conflitto con le autorità religiose. Nel IV secolo a.C. Anassagora di Clazomene viene accusato, primo tra i filosofi della natura, di empietà; difeso da a-

mici potenti, viene liberato e può così sfuggire all'ostilità ateniese. Grazie ai suoi due più illustri rappresentanti, Epicuro (341-270 a.C.), che istituisce la prima scuola cui sono ammesse anche le donne, e Lucrezio (I secolo d.C.), autore del magnifico poema cosmologico, *De rerum natura*, l'atomismo resta fiorente, almeno fino all'avvento del Cristianesimo. Con i primi secoli dell'era cristiana cade, invece, nell'oblio; riscoperto nel Rinascimento, tornerà a far parte della corrente principale della scienza solo nel XVII secolo.

Platone (428-347 a.C.) ha in mente un universo finito, chiuso da una sfera ultima contenente le stelle. Per parlare dello "spazio" (il termine italiano come quello francese viene dal latino *spatium*), i Greci utilizzavano le espressioni più diverse: *khaos*, *kosmos*, *apeiron*, *kenon*, *pan* ("tutto"), *ouranos* ("cielo"), ecc. Nel *Timeo* viene introdotto, però, un termine specifico, *chora*, che designa l'estensione o spazio in quanto ricettacolo della materia, definito da quest'ultima. Proprio Platone svolgerà un ruolo essenziale nell'evoluzione del pensiero astronomico, sottolineando con forza la necessità per i filosofi della natura di non limitarsi alla contemplazione degli astri ma di fare ricorso alla matematica e alla geometria per scoprire la vera natura dei corpi celesti e spiegare così i loro movimenti. L'intera astronomia greca, da Eudosso e Aristotele fino a Tolomeo (la cui opera nel II secolo d.C. rappresenterà il coronamento di queste concezioni), dovrà la sua fioritura al precetto platonico di un'astronomia geometrizzata.

Aristotele (384-322 a.C.) si oppone a Platone, delineando non una vera e propria teoria dello spazio, bensì una teoria del luogo (*topos*), distinto dall'estensione e indipendente dalla materia. Il luogo è il limite che comprende le cose. L'universo non è *un*, ma *il* luogo, somma totale di tutti i luoghi occupati dalle cose. In polemica con gli Atomisti, Aristotele ritiene che i corpi siano necessariamente in numero finito. A livello cosmologico la sua concezione si avvicina a quella di Platone: una Terra fissa al centro di un mondo finito, circoscritta dalla sfera che contiene tutti i corpi dell'universo. Tale sfera, però,

non è da "qualche parte", poiché al di là di essa non vi è nulla, né vuoto né estensione.

Nell'Antichità greca vi sono altri grandi indirizzi di pensiero cosmologico. Uno, che raggruppa gli Ionici, gli Stoici, ecc., distingue tra mondo fisico (l'universo materiale) e spazio: l'universo è considerato come un isolotto di materia immerso *in* uno spazio extracosmico infinito e senza proprietà, che lo ingloba e lo contiene. Di contro, Atomisti e Peripatetici ritengono che l'esistenza stessa dello spazio discenda da quella dei corpi; mondo fisico e spazio coincidono; sono infiniti per gli Atomisti, finiti per i Peripatetici. Ancor oggi la maggior parte delle persone ha in mente l'una o l'altra di queste concezioni.

I fautori di un universo finito si scontrano, però, con una difficoltà di tipo logico: se ciò che è al di là del mondo fa parte del mondo, quest'ultimo non può essere limitato senza che si generi una contraddizione. Si tratta del cosiddetto "paradosso del bordo", che sarà risolto solo alla fine del XIX secolo. [▶ **p. 205, Il paradosso del bordo**]

Non diversamente dall'atomismo giudicato troppo materialistico, la dottrina aristotelica, che implica un tempo eterno e un universo increato, viene respinta dai primi teologi cristiani. Fino al IX secolo i modelli cosmologici d'Occidente riprendono semmai le concezioni arcaiche degli Ionici, cioè quelle di un cosmo finito immerso nel vuoto, con la differenza che il cosmo assume la forma di un tabernacolo, o quella di un cuore.

La cosmologia di Aristotele, perfezionata dall'astronomia di Tolomeo e reintrodotta grazie alle traduzioni e ai commenti arabi, viene sistemata in modo da soddisfare le esigenze dei teologi. In particolare, ciò che si colloca al di là dell'ultima sfera materiale del mondo acquista lo statuto di spazio, se non fisico, almeno "etereo" o spirituale. Battezzato "Empireo", è considerato il luogo in cui risiedono Dio, angeli e beati. Il cosmo medievale è non solo finito, ma molto piccolo: la distanza della Terra dalla sfera delle stelle fisse è stimata 20.000 raggi terrestri, di modo che il Paradiso, che si trova al confine, è ragionevolmente accessibile per le anime dei defunti. Ovvia-

mente, il cristiano trova il suo posto al centro di tale edificio.

Questo modello d'universo dominerà fino al XIV secolo, senza tuttavia impedire la rinascita delle idee atomistiche. Dopo la riscoperta del manoscritto di Lucrezio, il cardinale tedesco Nicola Cusano (1401-1464) perora la causa dell'infinità dell'Universo, della pluralità dei mondi abitati e del movimento della Terra. Ma il suo argomento resta fondamentalmente metafisico: l'universo è infinito poiché è opera di Dio, Dio non può essere limitato nell'opera sua.

Quando il canonico polacco Nicola Copernico (1473-1543) propone il suo sistema detto poi "eliocentrico", in cui il Sole occupa praticamente il centro fisico mentre la Terra ruota intorno a esso e su se stessa, mantiene l'idea di un cosmo chiuso, delimitato dalla sfera delle stelle fisse. Benché essa appaia due mila volte più distante che nel modello tolemaico, nondimeno l'universo resta limitato.

Occorrono parecchi decenni perché l'edificio aristotelico riveli le prime crepe. Nel 1572 il danese Tycho Brahe (1546-1601) osserva una nuova stella e mostra che essa è situata nella sfera delle stelle fisse, ossia nella regione celeste fino ad allora supposta immutabile. Nel 1576 è l'inglese Thomas Digges (1545-1595), copernicano convinto, a indicare come le stelle non siano distribuite su uno strato sottile, sulla superficie dell'ottava e ultima sfera del mondo, ma si estendano indefinitamente "verso l'alto". Tuttavia, Digges non propone ancora una concezione fisica dello spazio infinito: a suo dire, cielo e stelle costituiscono sempre l'Empireo, dimora di Dio, e per questo non appartengono davvero al *nostro* mondo.

La rottura epistemologica è innescata da due filosofi italiani.[1] Nel 1587 Francesco Patrizi (1529-1597) dà alle stampe il suo *De spacio physico et mathematico*, in cui presenta l'idea rivoluzionaria che il vero oggetto della geometria sia lo spazio in quanto tale, e non le figure, come sembrava si pensasse dai tempi di Euclide. Patrizi inaugura un nuovo concetto di spa-

1. Vedi A. Koyré, *Dal mondo chiuso all'universo infinito*, tr. it. Feltrinelli, Milano 1970.

zio fisico infinito, obbediente a leggi matematiche – accessibile, dunque, all'intelletto. Ma è soprattutto al suo contemporaneo Giordano Bruno da Nola (1548-1600) che va attribuita la vera paternità della cosmologia infinitistica. Il primo libro del suo *De immenso* è interamente dedicato a una definizione logica dello spazio infinito. L'argomento del Nolano poggia su basi fisiche, e non esclusivamente teologiche. Il suo pensiero cosmologico si ispira all'atomismo di Lucrezio, alle riflessioni di Cusano e alle tesi di Copernico. Di quest'ultimo Bruno conserva l'eliocentrismo (nel senso ristretto per cui i pianeti noti e la Terra orbitano intorno al Sole) e la costituzione del Sistema solare, ma rigetta il finitismo cosmologico. Precursore di Keplero e di Newton, rifiuta il culto della sfera e del movimento circolare uniforme per descrivere i moti celesti. I suoi scritti, coraggiosi e originali, non sempre vengono però compresi dai suoi contemporanei (malignamente Galileo Galilei li utilizza senza mai citare direttamente l'autore). La Chiesa cattolica li condanna.

Di fatto, la vera rivoluzione filosofica alla fine del XVI secolo non consiste tanto nell'affermazione dell'eliocentrismo copernicano, quanto in quella dell'infinita pluralità dei mondi. In prima fila nella battaglia contro l'aristotelismo, spinto dalla sua passione per l'infinito, Bruno rifiuta di abiurare; muore sul rogo in Campo dei Fiori, a Roma, il 17 febbraio 1600.

Keplero (1571-1630), altro grande artefice della rivoluzione astronomica, cerca anzitutto di costruire un modello d'universo fondato sull'uso di figure geometriche particolari: i poliedri regolari. [▶ **p. 349, I poliedri**]

Il suo tentativo fallisce: i calcoli circa la disposizione delle orbite planetarie non corrispondono ai nuovi dati sperimentali raccolti da Tycho Brahe. Risolvendosi alla fine per le ellissi nella descrizione delle orbite dei pianeti, Keplero sovverte il dogma del movimento circolare uniforme come spiegazione ultima dei moti celesti. Oppone, però, un netto rifiuto alle argomentazioni di Bruno sull'infinità dell'universo. Considera tale nozione puramente metafisica e, non essendo a suo dire basata sull'esperienza, priva di significato scientifico. "In ve-

rità, un corpo infinito non può essere compreso dal pensiero. Le determinazioni dell'intelletto circa l'infinito si riferiscono o al significato della parola 'infinito' oppure a qualcosa che eccede qualsiasi misura numerica concepibile, visiva o tattile; cioè a qualcosa che non è infinito in atto, poiché non è concepibile una misura infinita."[2] L'argomentazione di Keplero si basa sull'enunciazione (per la prima volta) di un paradosso astronomico che apparentemente costituisce un ostacolo per l'idea di spazio infinito e che sarà oggetto di discussioni a non finire: perché fa buio di notte? Come il paradosso del bordo, anche questo problema sarà risolto in maniera soddisfacente a metà del XIX secolo, ma in modo del tutto diverso. [▶ **p. 209, Il paradosso del buio di notte**]

A partire dal 1609 le osservazioni con il cannocchiale di Galileo Galilei(1564-1642) forniscono i primi indizi diretti dell'universalità delle leggi della natura. Sulla questione dell'infinità dello spazio, però, Galileo, non molto diversamente da Keplero, adotta l'atteggiamento prudente del fisico: "E non sapete ch'è ancora indeciso (e credo sarà per sempre tra le scienze umane) se l'universo sia finito o infinito?".[3]

Comunque sia, è ormai aperta la via a nuove cosmologie basate su uno spazio infinito. Fino ad allora, la nozione di spazio era concepita nell'ordine cosmologico e fisico della natura, e non come il "fondale" delle figure e delle costruzioni geometriche di Euclide. In altri termini, lo spazio fisico non era matematizzato. Lo diviene soprattutto grazie a René Descartes (ovvero Cartesio, 1596-1650) che ha l'idea di identificare ogni punto con una tripla di numeri reali: le sue coordinate. L'introduzione di un sistema universale di coordinate che ricopra interamente lo spazio e consenta di misurare le distanze è per Cartesio espressione del ruolo decisivo dell'unificazione e del-

2. J. Kepler, *De Stella Nova* (1606), in *Mysterium Cosmographicum, De Stella Nova*, a cura di M. Caspar, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1938.

3. G. Galilei, "Lettera a Francesco Ingoli", in *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale diretta da A. Favaro, Barbera, Firenze 1890-1909, vol. 6, pp. 509-561.

l'uniformazione dell'universo nel suo contenuto fisico e nelle sue leggi geometriche. Lo spazio è una sostanza allo stesso titolo dei corpi materiali: un etere infinito agitato da innumerevoli vortici, al centro dei quali sono collocate le stelle e i loro sistemi planetari.

Questa nuova concezione del cosmo sovverte il pensiero filosofico, ma lo allontana anche dall'antico entusiasmo degli Atomisti e da quello più recente di Bruno: "Lo spazio assoluto, che ispirò gli esametri di Lucrezio, lo spazio assoluto che era stato una liberazione per Bruno, fu un labirinto e un abisso per Pascal".[4] Da parte loro, gli uomini di scienza non si lasceranno condizionare da questi stati d'animo e procederanno decisi verso l'universo infinito.

La tendenza alla geometrizzazione radicale dello spazio e alla sua infinitizzazione, abbozzata da Cartesio, è portata alle estreme conseguenze da Isaac Newton (1642-1727). Questi postula uno spazio assoluto, che ingloba non solo lo spazio-fondale della matematica e lo spazio fisico dell'astronomia, ma anche quello della metafisica, poiché per Newton lo spazio non è altro che il "*sensorium Dei*". Lo spazio fisico, identificato quindi con lo spazio geometrico, è necessariamente euclideo (il solo conosciuto all'epoca), senza curvatura, amorfo e infinito in tutte le direzioni. Entro questo quadro irrigidito Newton spiega la meccanica celeste nei termini della legge d'attrazione universale, che egli considera ormai responsabile della gravitazione e della struttura a grande scala dell'Universo. Con Newton la cosmologia si radica per più di due secoli nella cornice di uno spazio euclideo infinito e di un tempo eterno.

Non tutti i problemi, però, sono risolti nella cosmologia newtoniana, anzi. Per quanto concerne la distribuzione delle stelle nello spazio, per esempio, Newton ritiene che queste ultime debbano occupare un volume finito; infatti, argomenta, se occupassero uno spazio infinito, sarebbero di numero infinito; la forza di gravità sarebbe allora infinita e l'Universo ri-

4. J.L. Borges, *Altre inquisizioni*, edizione italiana a cura di F.R. Amaya, Adelphi, Milano 2000.

sulterebbe instabile. Inoltre, Newton assume che le stelle siano distribuite uniformemente entro una massa finita – poniamo la Galassia. Resta sempre un problema di instabilità: dal momento che ogni corpo celeste è attratto da ogni altro, al minimo movimento, cioè alla minima perturbazione meccanica, tutti i corpi dell'universo cadrebbero verso un unico centro, e l'universo collasserebbe. Dunque, l'universo di Newton funziona solo se esclude il movimento a grande scala: per così dire, il suo spazio è rigido, il suo tempo paralizzato.

È contro questa concezione che si scaglia Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pur essendo a sua volta incline a credere che lo spazio sia infinito, dissente profondamente da Newton su più di una questione. Per il filosofo tedesco lo spazio non ha alcun carattere assoluto: è invece un sistema di relazioni ideali tra corpi, che pertanto non esiste indipendentemente da questi. D'altra parte Leibniz ritiene che le stelle siano uniformemente distribuite nello spazio infinito, poiché, se così non fosse, esisterebbe una sfera che le racchiuderebbe tutte; l'Universo fisico sarebbe allora limitato da tale sfera e avrebbe dunque un centro – cosa che dal punto di vista copernicano (per il quale non può esistere alcuna posizione privilegiata nell'universo) è assolutamente inaccettabile.

Newton e Leibniz hanno entrambi cercato di dimostrare la giustezza delle loro rispettive concezioni tramite ragionamenti per assurdo: se, ammettendo una data proposizione, se ne trae una contraddizione, è allora vera la negazione di quella proposizione. Immanuel Kant (1724-1804), a sua volta, cerca di dare base logica alla propria idea di spazio. Difende (contro Leibniz) l'assolutezza dello spazio, senza però farne una sostanza. Sostiene che l'intuizione pura dello spazio assicura la validità della geometria euclidea. Inoltre, è convinto di poter liquidare il dibattito sul carattere finito o infinito dello spazio dimostrando l'impossibilità di costruire senza contraddizione logica tanto un universo finito quanto un universo infinito. Ne conclude, dunque, che la questione non ha alcun senso scientifico, ed è vano discuterne!

Tuttavia, il ragionamento kantiano è sbagliato, poiché pog-

gia su proposizioni che provengono dal cosiddetto "senso comune": per esempio, il carattere finito implicherebbe qualche limite, mentre l'infinito implicherebbe l'assenza di limiti, ecc. Non è, dopotutto, che un argomento d'autorità, condiviso dalla maggioranza. Ma, come ci ricorda Galileo, i buoni scienziati sono "come l'aquile, e non come gli storni": "quelle, perché son rare, poco si veggono e meno si sentono, [mentre] questi, che volano a stormi, dovunque si posano, empiendo il ciel di strida e di rumori".[5]

Questo solitario volo sulla natura dello spazio è stato compiuto da un manipolo di audaci geometri a metà del XIX secolo: Gauss, Bolyai, Lobačevskij e Riemann scoprono le geometrie non euclidee, che suoneranno come campana a morto del kantiano senso comune. [▶ **p. 215, Le geometrie non euclidee**]

Essi dimostrano che ciò che garantisce la validità della geometria euclidea non è l'intuizione, bensì il quinto postulato di Euclide, quello per cui per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data. Che cosa accadrebbe se si modificasse tale postulato? Andremmo incontro a contraddizioni, se supponessimo, per esempio, che per quel punto possa passare un'infinità di rette parallele (spazio di Lobačevskij) o nessuna (spazio di Riemann)? Niente affatto: le geometrie costruite su questi postulati rivali sono coerenti tanto quanto quella di Euclide. Da un punto di vista puramente logico, quest'ultima perde il suo statuto privilegiato, divenendo un sistema assai particolare tra gli altri. Come è noto, nel 1854 Bernhard Riemann dimostra che uno spazio illimitato non è necessariamente infinito. La sua dimostrazione è analoga agli argomenti che permettono di mostrare che la superficie della Terra è curva e finita, benché senza limiti. In tre dimensioni, egli dà l'esempio dell'ipersfera. [▶ **p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali**]

Riemann non si accontenta di ragionare su spazi astratti, vuole applicare le sue scoperte alla cosmologia. È il primo a

5. G. Galilei, in *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale diretta da A. Favaro, Barbera, Firenze 1890-1909, vol. 6, pp. 197-372.

proporre un modello d'Universo finito ma senza frontiere, descritto geometricamente appunto da un'ipersfera. Il paradosso del bordo è risolto!

Nel 1870 il matematico inglese William Clifford (1845-1879) butta giù un articolo[6] in cui delinea la possibilità di una variazione della curvatura dello spazio da un punto all'altro, che sarebbe responsabile della gravità e del movimento della materia; congettura poi che piccole regioni dello spazio siano di natura simile a collinette sulla superficie della Terra, che in media è piatta; ciò significa che le leggi della geometria euclidea non sono valide. Tuttavia, Clifford non riesce nel suo tentativo di modellizzare geometricamente la gravitazione, poiché non prende in considerazione le possibili variazioni temporali della curvatura.

L'astrofisico tedesco Karl Schwarzschild[7] (1873-1916) pubblica nel 1900 un articolo di cosmologia passato inosservato, ma che, col senno di poi, appare premonitore. Questo originale personaggio è uno dei rari astronomi che all'epoca sua ne sanno abbastanza di matematica superiore da capire le sottigliezze delle geometrie non euclidee. Si chiede, così, se lo spazio reale non possa essere curvo. A partire dalle osservazioni cerca di trovare un limite inferiore al raggio di curvatura dello spazio (quando questo limite tende a infinito lo spazio diventa euclideo). A quel tempo la natura extragalattica delle nebulose spirali non era stata ancora dichiarata, e il modello allora vigente circa la disposizione generale dei corpi celesti prevedeva che il numero di tutti i possibili astri non superasse i 40 milioni, che fossero tutti confinati in un volume di solo qualche migliaia di unità astronomiche di raggio (per unità astronomica si intende la distanza Terra-Sole, ovvero 150 milioni di chilometri) e che all'esterno vi fosse il vuoto dello spazio newtoniano infinito. Così, la nostra galassia, la Via Lattea, è conside-

6. Vedi W.K. Clifford, *Il senso comune delle scienze esatte: esposizione per tutti dei principi delle scienze matematiche*, tr. it. F.lli Dumolard, Milano 1886.

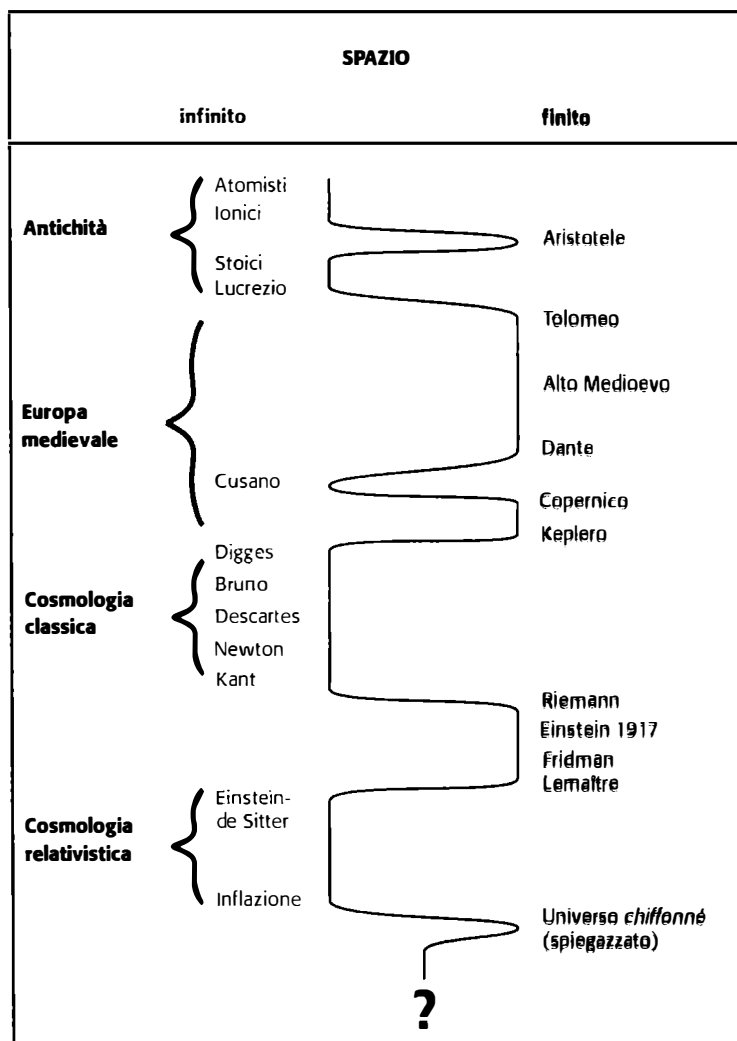
7. Diventerà famoso nel 1916 per la scoperta, fatta quando era in trincea sul fronte russo, della prima soluzione esatta delle equazioni della relatività, rappresentante lo spazio-tempo intorno a un buco nero.

rata un isolotto di materia unico perduto in un oceano di vuoto illimitato. Schwarzschild si chiede se quest'isola non potrebbe occupare l'intero spazio, a condizione che quest'ultimo sia finito, piccolo e senza frontiera – possibilità, questa, offerta dalla geometria riemanniana. Valutando la separazione media delle stelle intorno al Sole e ipotizzando che l'Universo contenga cento milioni di stelle, egli trova che il raggio dello spazio occupato dalla materia è meno di un milione di unità astronomiche. Ciò gli consente di fissare un limite inferiore al raggio di curvatura dello spazio. Ne conclude: "Si può supporre, senza alcuna contraddizione con l'esperienza, che l'Universo sia contenuto in uno spazio iperbolico con un raggio di curvatura maggiore di 4 milioni di unità astronomiche, o in uno spazio sferico finito con un raggio di curvatura maggiore di 100 milioni di unità astronomiche".[8]

In una nota alla fine dell'articolo Schwarzschild spinge più oltre le sue riflessioni, congetturando che la topologia dello spazio possa essere complicata e generare immagini fantasma della Via Lattea. [▶ **p. 371, *Topos e cosmos***]

La cosmologia conosce un rapido sviluppo dopo la messa a punto (1915) della relatività generale di Einstein. In tale teoria l'Universo non si riduce a uno spazio e a un tempo assoluti e separati; esso è costituito dall'unione di spazio e di tempo entro una geometria a quattro dimensioni incurvata dalla presenza della materia.

È la curvatura dello spazio-tempo che consente di modellizzare correttamente la gravità, e non soltanto la curvatura dello spazio, come aveva sperato Clifford. Il carattere non euclideo dell'Universo appare così non più una bizzarria, bensì, al contrario, una necessità fisica per rendere conto dei fenomeni gravitazionali. La curvatura è legata alla densità di materia. Già nel 1917 Einstein elabora il primo modello d'universo relativistico. Al pari di Riemann, vuole un universo chiuso (os-

8. K. Schwarzschild, *Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 35, 1900, p. 337.

24.1 Finito o infinito?

L'altalena delle concezioni circa l'estensione dello spazio nel corso della storia non può che concludersi – è ovvio – con un punto interrogativo.

sia di volume e di circonferenza perfettamente finiti e misurabili) e senza frontiere; perciò, come Riemann, sceglie l'ipersfera per modellizzare la parte spaziale dell'Universo.

Il modello di Einstein, peraltro, accoglie l'ipotesi di un Universo statico, in quanto il raggio dell'ipersfera resta costante nel corso del tempo. In realtà, le soluzioni cosmologiche della relatività consentono di considerare uno spazio che si dilati o si contragga nel corso del tempo – come ha dimostrato il fisico teorico russo Aleksandr Fridman (1888-1925) tra il 1922 e il 1924. Negli stessi anni, l'entrata in funzione del grande telescopio di Mount Wilson (California) cambia radicalmente lo scenario cosmico. Nel 1924 le osservazioni di Edwin Hubble (1889-1953) provano che la nebulosa di Andromeda è situata lontano, al di fuori della nostra galassia. In breve, Hubble e i suoi collaboratori mostrano che ciò vale per tutte le nebulose spirali: vi sono tantissime galassie come la nostra, e l'Universo è costituito dall'insieme di queste galassie. Gli universi-isola già intravvisti da Thomas Wright (1711-1786), da Kant e da Johann Heinrich Lambert (1728-1777) paiono ora legittimati dall'esperienza, e l'Universo fisico sembra all'improvviso immensamente cresciuto, passando da qualche migliaio a parecchie decine di milioni di anni luce come minimo. Oltre a questo ingrandimento spaziale, vi è una seconda scoperta fondamentale: essa riguarda l'evoluzione temporale dell'Universo. Dal 1925 si accumulano sempre più indizi che fanno credere che le altre galassie si allontanino sistematicamente dalla nostra con velocità proporzionali alla distanza. Questo risultato sperimentale resta però del tutto incomprensibile, finché, agli inizi degli anni Trenta, la comunità scientifica non accetta la soluzione proposta nel 1927 dal fisico belga Georges Lemaître (1894-1966): è l'intero spazio che si dilata nel corso del tempo; esso è in espansione, e trascina in questa espansione l'insieme delle galassie. [▶ **p. 235, L'espansione e l'infinito**]

La questione della finitezza o infinitezza dello spazio è perfettamente posta nel quadro delle soluzioni di Fridman e di Lemaître. Questi modelli cosmologici assumono che le irregolarità della distribuzione della materia siano trascurabili, sic-

ché l'Universo avrebbe dappertutto le stesse proprietà geometriche. Tali proprietà sono soltanto di due tipi: la curvatura, costante nello spazio (ma di cui resta da precisare il segno), e la topologia.

Per quanto concerne la curvatura, tre sono le famiglie di spazi considerate: lo spazio euclideo (a curvatura nulla), lo spazio sferico (a curvatura costante) e lo spazio lobačevskijano (detto anche iperbolico, a curvatura negativa). Lo spazio sferico è sempre di volume finito. È per questa ragione che tutti i pionieri della cosmologia relativistica – Einstein, de Sitter, Fridman e Lemaître – lo hanno subito scelto.

La relatività generale indica come misurare direttamente la curvatura dello spazio. Il valore di quest'ultima dipende dalla densità media di materia e di energia contenute nello spazio. Se la densità reale supera una soglia critica, la curvatura è positiva e lo spazio finito. Da sessant'anni la cosmologia osservativa cerca di determinare la curvatura dello spazio indagando tutte le forme di materia e di energia che vi contribuiscono. [▶ **p. 291, La materia oscura**]

Nel caso delle geometrie delle altre due famiglie di spazi, quella euclidea e quella iperbolica, il carattere finito o infinito dello spazio non dipende più dalla curvatura e dalla densità di energia, bensì dalla topologia. Attualmente, però, non esiste alcuna teoria fisica generale che consenta di predire la topologia globale dell'Universo a partire dalle sue caratteristiche locali.

25

IL PARADOSSO DEL BORDO

> Il Mondo non è al di fuori, né al di là, poiché contiene e abbraccia ogni cosa.
>
> GUILLAUME D'AUVERGNE

Se l'Universo fosse finito, sembrerebbe indispensabile indicarne il centro e la frontiera. Il centro non sembra porre eccessive difficoltà concettuali: basta collocarvi la Terra, come nei sistemi geocentrici dell'Antichità (le apparenze vanno in tal senso), o il Sole, come fa Copernico nel suo sistema "eliocentrico". Di contro, la nozione di "bordo" dell'Universo risulta ben più problematica.

Nel V secolo a.C. il pitagorico Archita di Taranto enuncia un paradosso volto a mostrare l'assurdità dell'idea di un bordo materiale dell'Universo. La sua argomentazione conoscerà notevole fortuna in tutti i dibattiti sullo spazio: se sono all'estremità del cielo, posso allungare una mano o tendere un bastone? È assurdo pensare che non possa farlo; ma se lo posso fare, quello che sta al di là è un corpo, o lo spazio. Allora, posso andare ancora al di là, e così via. E se vi è sempre un nuovo spazio verso il quale mi è possibile tendere la mano, ciò implica chiaramente un'estensione senza limiti... Da qui il paradosso: se l'Universo fosse finito, avrebbe un bordo; questo bordo, però, potrebbe essere indefinitamente oltrepassato.

Tale ragionamento è ripreso da atomisti come Lucrezio, cui si deve l'immagine della lancia scagliata oltre il bordo del-

l'Universo; nonché, in seguito, da tutti i sostenitori dell'infinitezza dell'Universo, come Cusano e Bruno.

È evidente che, se si concepisce l'Universo come uno spazio racchiuso da un involucro, per esempio dalla superficie della sfera delle stelle fisse, come volevano Platone e Aristotele, il paradosso è insolubile. Tuttavia, nel corso dei secoli i fautori della finitezza dell'Universo cercheranno di escogitare spiegazioni soddisfacenti. Una di queste, tratta dalla dottrina aristotelica rivista dal Medio Evo cristiano, propone un bordo graduale: il mondo fisico, dominio degli elementi corruttibili, si modifica progressivamente in mondo spirituale, di natura incorruttibile. Il paradosso sarebbe così risolto: la lancia, costituita di elementi terrestri, ricade nel suo luogo naturale che è la Terra; oppure, supera effettivamente la frontiera, ma si tramuta in elemento etereo... Un'altra spiegazione, forse meno astrusa, è quella avanzata a suo tempo dagli Stoici, per i quali il bordo sarebbe mobile: il mondo materiale è finito, ma è circondato da un vuoto infinito. Scagliare la lancia al di là del bordo significherebbe semplicemente ingrandire il cosmo, facendone arretrare la frontiera.

Bisogna attendere lo sviluppo delle geometrie non euclidee, nel XIX secolo, perché il paradosso sia risolto in maniera logicamente soddisfacente. Tali geometrie consentono di concepire spazi tridimensionali finiti ma privi di bordo, proprio come è, in due dimensioni, la superficie di una sfera. [▶ **p. 215, Le geometrie non euclidee**]

Nel XX secolo le ricerche sulla topologia globale degli spazi, indipendentemente che siano euclidei o meno, portano ugualmente a soluzioni di volume finito ma senza frontiera. Applicate alla cosmologia, queste nuove geometrie consentono di considerare un Universo finito, senza cadere in alcuna contraddizione.

Tali nozioni non sono, però, intuitive. Ancor oggi prevale, nella testa di molte persone, piuttosto la concezione stoica. Tutti quelli che, a proposito dei modelli del Big Bang delineati dalla cosmologia contemporanea, si chiedono *in che cosa*

l'Universo si dilati, ragionano sulla base dell'immagine mentale di un cosmo-bolla dal bordo mobile, che si gonfia in uno spazio vuoto e infinito. Quest'immagine, però, va abbandonata. I modelli cosmologici relativistici identificano l'Universo con lo spazio – più precisamente, con un'entità fisica e geometrica più generale, lo spazio-tempo-materia. L'Universo, finito o infinito che sia, non può dunque gonfiarsi *in* qualche cosa, poiché non vi è spazio al di fuori di esso.

Nello stesso modo in cui il concetto di centro cosmico è stato eliminato dal principio cosmologico, la nozione di bordo dell'Universo lo è dal "principio del contenuto": *l'Universo fisico contiene tutto ciò che è fisico, e nient'altro*. L'enunciato sembra banale, ma in realtà è più profondo di quanto a prima vista appaia. Ci dice, in particolare, che l'Universo non è un oggetto fisico come tutti gli altri. Ogni oggetto ha un bordo – anche qualora non sia netto, come nel caso del Sole o di una galassia. L'Universo, però, non ha bordo. Lo spazio e il tempo non sono ricettacoli vuoti nei quali il mondo materiale può essere collocato alla maniera di un oggetto. Fanno parte integrante dell'Universo. Per riprendere la felice espressione di Cusano: "La fabbrica del mondo ha centro ovunque e circonferenza in nessun luogo".[1]

1. La battuta è in genere attribuita a Blaise Pascal, che l'ha ripresa nei suoi *Pensieri*.

26

IL PARADOSSO DEL BUIO DI NOTTE

> A un tratto, una sera, si vide la notte buia e superba, all'ora in cui sotto il grande sudario tutto tace.
>
> VICTOR HUGO

A prima vista, non sembra esservi ragione di stupirsi che faccia buio di notte. Dopo il tramonto, il Sole non rilascia più luce, restano soltanto le stelle a illuminare debolmente l'oscurità notturna. Supponiamo, però, che lo spazio sia infinito, e uniformemente riempito d'astri (stelle, galassie). In qualunque direzione guardassimo, dovremmo trovare un astro più o meno lontano sulla nostra visuale. La somma della luminosità di tutti gli astri dovrebbe rendere il cielo notturno brillante come a mezzogiorno, anzi di più: il fondo del cielo assomiglierebbe a una volta radiosa ovunque tappezzata di stelle, alla maniera di un gigantesco sole. Perché non è così? Se esistono altre stelle di natura identica alla nostra, come è che tutte insieme non splendono più del nostro Sole? Ecco il "paradosso del buio di notte". Per comprenderlo appieno, assimiliamo l'universo a una foresta e le stelle a tronchi d'albero identici, assai distanti l'uno dall'altro. I tronchi a noi più vicini ci appaiono più grandi, quelli più lontani più piccoli; è evidente, però, che se la foresta fosse sufficientemente estesa, i tronchi finirebbero per così dire per sovrapporsi formando un fondo continuo, che sembra circondarci quasi fosse un muro.

Il problema venne formulato per la prima volta da Keplero,

nel 1610.[1] Il *Sidereus nuncius*, pubblicato da Galileo nello stesso anno, annuncia le prime osservazioni al cannocchiale che rivelano molte più stelle di quanto si poteva allora immaginare. Il paradosso del buio di notte rappresenta apparentemente un ostacolo per la concezione di uno spazio omogeneo e infinito. Poiché non condivide l'opinione di Bruno, secondo la quale il Sole è un mondo come gli altri, in mezzo a stelle disperse all'infinito, Keplero risponde al paradosso optando per un modello di universo finito, limitato da un muro o da una volta. In tal caso, le stelle sono troppo piccole di numero per ricoprire il cielo intero, e non vi è dunque motivo che il fondo del cielo brilli.

Benché si scontri con il paradosso del bordo [▶ **p. 205, Il paradosso del bordo**], Keplero ritiene che tale spiegazione sia l'unica in grado di rendere ragione del buio notturno. Tuttavia, nel corso del XVIII secolo, la concezione newtoniana di uno spazio infinito si impone a scapito del cosmo chiuso difeso da Keplero e dai suoi predecessori. È in questo nuovo contesto che il ragionamento sul perché fa buio di notte viene ripreso dapprima dal celebre astronomo inglese Edmund Halley ("Se il numero di Stelle Fisse fosse più che finito, l'unione dei loro Dischi apparenti formerebbe una superficie luminosa") e poi, nel 1743, dall'astronomo svizzero Jean-Philippe Loys de Chéseaux, il quale calcola che il cielo, di giorno come di notte, dovrebbe brillare 90.000 volte più del Sole.

All'inizio del XIX secolo, nella città di Brema, in Germania, un medico e astronomo dilettante passa le notti a scrutare il cielo con l'aiuto di un cannocchiale istallato sul tetto. Di nome fa Heinrich Olbers, e a lui si deve la scoperta dell'asteroide Pallade nonché di alcune comete. Nel 1823 torna sul problema della trasparenza dello spazio cosmico: "Se davvero vi fossero dei soli in tutto lo spazio infinito, [...] il loro insieme sarebbe infinito e, di conseguenza, il cielo intero dovrebbe bril-

1. J. Kepler, *Dissertatio cum Nuncio Sidereo*, ed. it. con commento e cura di G. Tabarroni, note introduttive di G. Horn-D'Arturo e E. Pasoli, Tipografia Compositori, Bologna 1965.

lare quanto il Sole. Infatti, ogni linea che immagino partire dai nostri occhi incontrerà necessariamente una qualsiasi stella fissa e perciò ogni punto del cielo dovrebbe inviarci della luce stellare, quindi della luce solare".[2] L'osservazione, questa volta, colpisce nel segno, al punto che il paradosso del buio di notte verrà ribattezzato "paradosso di Olbers".

Come rispondervi nel contesto della cosmologia newtoniana? Varie sono le soluzioni proposte. Anzitutto, davvero le altre stelle sono analoghe al Sole? La risposta è sì. Per quanto varii in grandezza, massa, luminosità e colore, ciascuna stella resta in media paragonabile alla nostra stella prediletta. In particolare, la brillanza della superficie è pressoché identica. Dunque, la soluzione del paradosso non può venire da qui.

È stata avanzata una seconda ipotesi, la quale assume che l'Universo sia riempito di materia diffusa, che assorbirebbe gran parte della luminosità stellare. Oggi ci è noto che lo spazio tra le galassie è pieno di gas e di polveri assai tenui. Ma sappiamo pure che queste particelle non possono assorbire radiazione senza riemetterla, in una maniera o nell'altra. Il paradosso del buio di notte non può essere risolto neppure in questo modo.

È stata proposta una terza ipotesi: non potrebbe darsi che la disposizione delle stelle nell'Universo sia molto particolare? Newton stesso immaginava una galassia unica, perduta in un oceano di vuoto. In tal caso, il numero di stelle sarebbe finito, e il paradosso risolto. Tuttavia, è difficile accettare che la Galassia abbia uno statuto così privilegiato. Come ha fatto notare Carl Charlier alla fine del XIX secolo, alcune ripartizioni gerarchiche delle stelle nell'Universo, pur estendendosi all'infinito, porterebbero a rivedere al ribasso il calcolo della somma delle luminosità. La soluzione del paradosso, però, richiederebbe una disposizione dei corpi celesti piuttosto inverosimile. I nostri telescopi hanno effettivamente scoperto una sorta di organizzazione gerarchica della materia visibile nell'Universo, sotto

2. Vedi J. Merleau-Ponty, *La Science de l'Univers à l'âge du positivisme*, Vrin, Paris 1983.

forma di stelle, galassie, ammassi e superammassi; essa, però, non corrisponde in alcun modo a quella proposta da Charlier.[3]

Nel 1848 il grande Edgar Allan Poe escogitò una soluzione radicalmente nuova.[4] In quel poema in prosa che è *Eureka* spiegò che il buio di notte poggiava sulla *finitezza del passato*: "L'unico modo per comprendere [...] i vuoti che il nostro telescopio individua in innumerevoli direzioni sarebbe quello di supporre che la distanza dello sfondo invisibile sia così immensa che mai nessun raggio abbia potuto giungere fino a noi". L'autore dei *Racconti straordinari* aveva compreso che osservare lontano nello spazio equivale a osservare il passato. Supponiamo, allora, che le stelle non esistano, per esempio, da più di un miliardo di anni. La luce si propaga alla velocità finita di 300.000 km/s. In un miliardo d'anni non può percorrere che una distanza di un miliardo di anni luce. Se una stella è più lontana, la sua luce non ha avuto il tempo di giungere a noi. Possiamo ricevere solo la luce degli astri che ha avuto il tempo di arrivare a noi, cioè solo la luce di quegli astri che sono sufficientemente vicini a noi. Così, anche se lo spazio fosse infinito e la distribuzione delle stelle illimitata, il cielo non sarebbe uniformemente brillante poiché le stelle (e *a fortiori* l'intero Universo) esistono soltanto da un tempo finito. Il paradosso è risolto!

Comprendendo come il buio di notte sia ricco di insegnamenti circa la finitezza temporale del mondo, Poe anticipa di decenni la cosmologia scientifica contemporanea. Tuttavia, poiché gli scienziati non traggono mai dai poeti l'ispirazione per le loro teorie, la spiegazione offerta da Poe resterà a lungo ignorata!

La cosmologia relativistica, con i suoi modelli del Big Bang, differisce profondamente da quella dei secoli precedenti. Propone almeno tre risposte possibili al paradosso, ciascuna delle quali è sufficiente per sbarazzarsi dell'equivoco: la finitezza

3. Charlier, in realtà, anticipa l'idea di quelli che nel linguaggio odierno si chiamano "frattali".

4. E.A. Poe, *Eureka. Saggio sull'universo materiale e spirituale*, ed. it. a cura di G. Giorello e M. Skey, con introduzione di G. Giorello, Theoria, Roma 1990.

dello spazio, già considerata da Keplero; la finitezza del tempo, suggerita da Poe; lo spostamento verso il rosso cosmologico.

Quanto alla finitezza dello spazio, la cosmologia relativistica ammette modelli di Universo sia finito sia infinito. La differenza rispetto al ragionamento di Keplero è che gli spazi finiti presi in esame dalla relatività hanno o una geometria non euclidea o una topologia multiconnessa, il che permette loro di evitare il paradosso del bordo. [▶ **p. 205, Il paradosso del bordo**]

Quanto poi alla finitezza del tempo, tutto induce a credere che l'Universo esista, in uno stato paragonabile a quello odierno, solo da un tempo limitato, impropriamente chiamato "età dell'Universo", che si avvicina ai 14 miliardi di anni. Ciò implica, immediatamente, che 14 miliardi di anni fa non era ancora comparsa alcuna stella.

Vi è, dunque, una frontiera spaziale al di là della quale non riceviamo luce. Non è una barriera fisica: non vi è nulla nello spazio che la marchi. Siamo come il marinaio in pieno oceano che non può vedere nulla al di là dell'orizzonte. Ecco perché questo limite fittizio alle nostre osservazioni è chiamato "orizzonte cosmologico", e perché questo orizzonte rende buia la notte.

La cosmologia relativistica fornisce una terza spiegazione plausibile, la quale poggia sul fatto che l'Universo è in espansione. La dilatazione dello spazio modifica le leggi di propagazione della luce nell'Universo; l'effetto si traduce in uno spostamento nella frequenza, lo "spostamento verso il rosso" delle galassie, e in un'attenuazione della sua energia. [▶ **p. 239, Galassie in fuga**]

Pensiamo alla radiazione di una stella lontana analoga al Sole, collocata per esempio in una galassia distante. La stella emette luce visibile, ma di questa riceviamo soltanto la radiazione per così dire infrarossa: le lunghezze d'onda dell'ottica sono state spostate verso questo dominio di minore energia. Ciascun fotone emesso dalla stella ci arriva a un ritmo più lento, e con meno energia. Nell'insieme riceviamo dalla stella una potenza luminosa meno intensa e meno visibile. Eseguiti tutti i calcoli, non vi è più nulla di sorprendente nel fatto che il fondo del cielo di notte non brilli.

La cosmologia relativistica risolve il paradosso del buio di

notte senza incorrere in alcuna contraddizione, mescolando per così dire tra loro le spiegazioni 2 e 3, e forse anche la 1. In tal modo essa permette di capire come una constatazione all'apparenza banale (appunto, il buio di notte) culmini nei più profondi insegnamenti circa la struttura spaziale e temporale dell'Universo.

A dire il vero, i modelli del Big Bang hanno modificato da cima a fondo la problematica relativa al buio di notte, a causa di un effetto che né Keplero, né Olbers, e neppure coloro che in seguito vi si sono cimentati, potevano sospettare: risulta, infatti, che il fondo del cielo è brillante, anche di notte. Ovviamente, non lo è quanto il Sole, né alle stesse lunghezze d'onda. Tuttavia, secondo i modelli del Big Bang, circa 14 miliardi di anni fa l'intero Universo era così caldo che ciascuno dei suoi punti era luminoso quanto la superficie del Sole. Ogni direzione che parte dal nostro occhio raggiunge un punto dell'Universo passato. E, per lo stesso ragionamento compiuto da Olbers, quand'anche non vi fosse *alcuna* stella, dovremmo essere circondati da questo enorme "oggetto" brillante che è l'Universo primordiale...

Non si tratta di un nuovo paradosso. Noi riceviamo questa radiazione, solo che è spostata verso le grandi lunghezze d'onda ed è attenuata. Quattordici miliardi di anni fa l'Universo era un immenso oggetto brillante, che emetteva in tutte le direzioni una radiazione a lunghezze d'onda visibili. Questa radiazione, però, ha subito lo stesso spostamento verso il rosso delle galassie. Ed essendo molto antica, lo spostamento è assai pronunciato: di un fattore superiore a 1000, ha trasformato la luce in microonde. Tale radiazione elettromagnetica fossile, residuo di un'epoca primordiale, è stata rilevata per la prima volta nel 1964. Oggi è abbondantemente osservata, ed è nota sotto il nome di "radiazione cosmica di fondo". [▶ **p. 311, La radiazione fossile**]

LETTURA CONSIGLIATA

E. HARRISON, *Le Noir de la nuit*, Le Seuil, Paris 1998.

27

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

> Forse, un giorno formeremo le nuove Figure che ci permetteranno di confidare nella Parola per percorrere lo Spazio curvo, lo Spazio non euclideo.
>
> FRANCIS PONGE

Nel libro primo degli *Elementi*,[1] Euclide formula i cinque "assiomi" (o "postulati") che a suo dire definiscono la geometria piana. Costituiranno la chiave di volta dell'intera geometria: un sistema di verità assolute, la cui validità apparirà a lungo indiscutibile. Tra le cause di tale convinzione vi è che questi postulati paiono evidenti: il primo afferma che tra due punti passa una e una sola retta; il secondo che ogni segmento di retta può essere prolungato indefinitamente nelle due direzioni; il terzo che, dato un punto e un segmento, è sempre possibile tracciare un cerchio che abbia quel punto per centro e quel segmento per raggio; il quarto che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro. Il quinto postulato è, però, meno evidente degli altri: data una retta e un punto esterno a essa, esiste una e una sola retta che passa per questo punto ed è parallela alla retta data.[2]

1. *Gli elementi di Euclide*, ed. it. a cura di A. Frajese e A. Maccioni, UTET, Torino 1977.

2. La formulazione originaria di tale postulato è differente da questa versione più "popolare", che dobbiamo al matematico scozzese John Playfair (1748-1819), il quale dimostrò che essa è equivalente a quella del testo di Euclide.

Essendo il "postulato delle parallele" meno chiaro degli altri, i matematici cercarono per secoli di dimostrarlo a partire dai primi quattro. Invano. Nel XIX secolo si ha uno dei grandi colpi di scena della storia della matematica (nonché del pensiero umano, come avremo modo di vedere tra breve): vengono scoperte due nuove geometrie che non soddisfano al quinto postulato, ma sono altrettanto coerenti di quella di Euclide. In una di queste, detta sferica, non può essere tracciata alcuna parallela che risponda alle condizioni sopra indicate. Si consideri la superficie della sfera; le rette sono i cerchi massimi il cui piano passa per il centro della sfera, e poiché tutti i cerchi massimi si intersecano in due punti diametralmente opposti (analogamente ai meridiani terrestri che si intersecano ai poli), nessuna "retta" può essere parallela a un'altra.[3] Nell'altra geometria, detta iperbolica, per un punto esterno a una retta passa un'infinità di parallele alla retta data.

Euclide, dunque, aveva dato prova di un acume fuori dal comune. Non solo il quinto postulato è indispensabile, poiché non è derivabile dagli altri; ma è quello che caratterizza in maniera univoca la geometria, a cominciare dal piano. Se lo si viola, la geometria cambia fondamentalmente natura: diviene non euclidea e consente di modellizzare uno spazio dotato di *curvatura*.

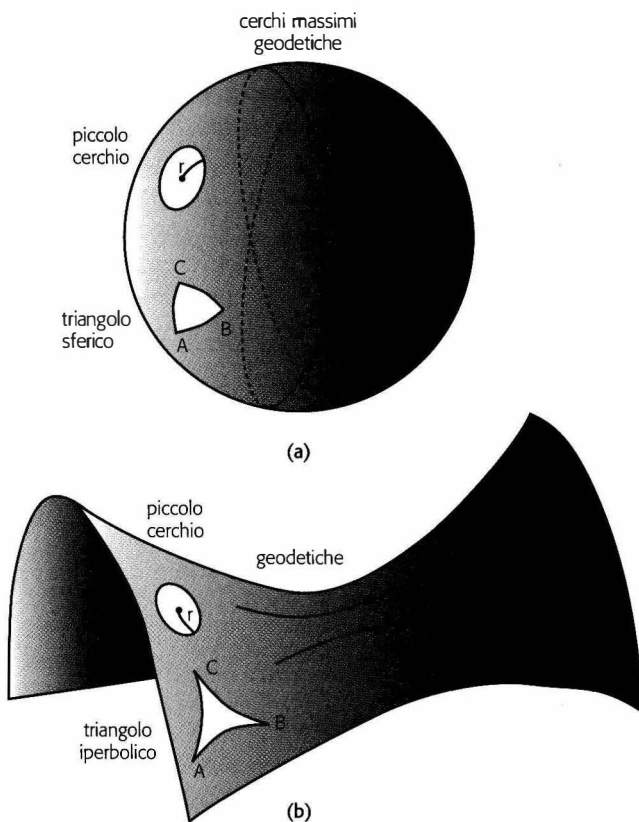
Ovviamente, già la geometria euclidea tridimensionale permetteva di parlare di curvatura a proposito di oggetti di dimensione minore. È evidente che la curvatura di una circonferenza, spazio a una dimensione, è inversamente proporzionale al raggio. Lo stesso vale per la sfera, superficie a due dimensioni: più cresce il raggio, più diminuisce la curvatura; al limite, se il raggio tende all'infinito, la curvatura tende a zero, cioè la sfera tende al piano euclideo. Del resto, in natura, la geometria piana è un'idealizzazione. La maggior parte delle superficie hanno una curvatura variabile da punto a punto, ora positiva ora negativa:

3. Si noti che la sfera non soddisfa né al primo, né al secondo postulato: per due punti situati agli antipodi l'uno dall'altro passa un'infinità di rette, e ogni retta è di lunghezza finita (la sua circonferenza).

un terreno ondulato, la superficie di un abito, quella del corpo umano, ecc. La scoperta delle geometrie non euclidee permette, però, per la prima volta nella storia, di definire in maniera coerente uno spazio *tridimensionale curvo*, e di conseguenza di utilizzarlo per modellizzare lo spazio fisico nel quale viviamo.

Il postulato delle parallele ammette due formulazioni equivalenti. La prima verte sulla somma degli angoli di un triangolo; la seconda sul rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo raggio. Se il postulato delle parallele è soddisfatto, la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 180 gradi e il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo raggio è uguale a 2π – questa è la geometria euclidea, a curvatura nulla. Se non può essere tracciata alcuna parallela, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi e il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo raggio è minore di 2π: siamo nella geometria sferica, a curvatura positiva. Se può essere tracciata un'infinità di parallele, la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180 gradi e il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo raggio è maggiore di 2π: siamo in una geometria iperbolica, a curvatura negativa.

Gli artefici delle geometrie non euclidee sono quattro geniali matematici, che rispondono ai nomi di Lobačevskij, Bolyai, Gauss e Riemann.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1846) è professore all'Università di Kazan, in Russia, quando pubblica (1829) i risultati ottenuti circa una "geometria immaginaria" (più tardi qualificata come iperbolica). Sovente si legge che le geometrie non euclidee sono state concepite a titolo di pura speculazione matematica, senza alcun riferimento al mondo fisico. È inesatto. Lobačevskij dichiara, per esempio, che non esiste alcuna branca della matematica, per quanto astratta sia, che non possa un giorno trovare applicazione ai fenomeni del mondo naturale. Utilizza i migliori dati all'epoca disponibili per calcolare la somma degli angoli di un triangolo cosmico i cui vertici sono formati da tre stelle. Non trova alcuno scarto rispetto a 180 gradi, e tuttavia resta convinto che la geometria euclidea non abbia nulla di "naturale". Non vivrà così a lungo da veder

27.1 Due superficie non euclidee

(a) **Le geometrie sferiche**
La sfera è uno spazio finito a due dimensioni, di curvatura uniforme (la stessa in ogni punto) e positiva. Le geodetiche – l'equivalente delle rette nel piano – sono i cerchi massimi, che hanno centro nell'origine e raggio uguale a quello della sfera. Non esistono pertanto geodetiche parallele. La geometria della sfera non è euclidea: la somma degli angoli di un triangolo sferico *ABC* è superiore a quella di un triangolo piano (180°); il rapporto tra la circonferenza e il raggio di un piccolo cerchio è minore di 2π.

(b) **Le geometrie iperboliche**
L'iperboloide, di cui è qui rappresentata una parte "a sella di cavallo", è uno spazio infinito a due dimensioni, di curvatura uniforme ma negativa (in ogni punto i due raggi di curvatura sono centrati da una parte e dall'altra della superficie). Esiste un'infinità di geodetiche parallele. La geometria dell'iperboloide non è euclidea: la somma degli angoli di un triangolo iperbolico *ABC* è inferiore a quella di un triangolo piano (180°); il rapporto tra la circonferenza e il raggio di un cerchio è maggiore di 2π.

trionfare le sue idee: rimosso nel 1846 dalla sua posizione accademica, muore quello stesso anno.

Senza essere a conoscenza dei lavori di Lobačevskij, l'ungherese János Bolyai (1802-1860) sviluppa la geometria iperbolica in un testo di ventiquattro pagine intitolato *La scienza assoluta dello spazio*, in appendice a un saggio più ampio scritto dal padre, a sua volta eccellente matematico. Abile al violino come al fioretto, ballerino e ufficiale dell'esercito imperiale austriaco, capace di parlare correntemente nove lingue, tra cui il cinese e il tibetano, János lascerà ventimila pagine di manoscritti matematici inediti. "Ho creato uno strano universo dal nulla", scrive. Al che il padre gli risponde: "Per l'amor di Dio, rinunciavi! Ti prego. Abbine timore come delle passioni dei sensi, perché anch'esso ti occupa tutto il tempo e ti priva della salute, della pace dello spirito e della gioia di vivere".[4]

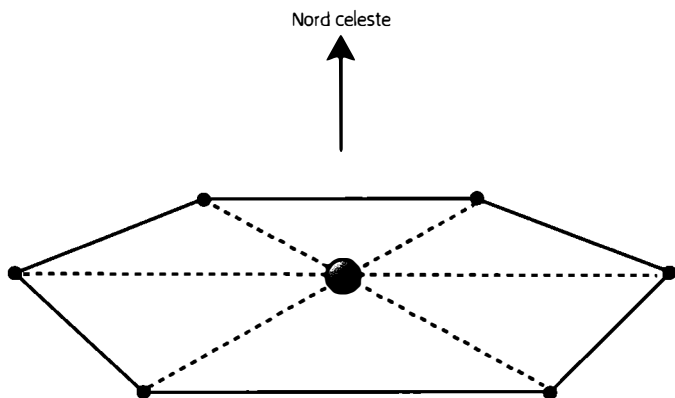
Karl Friedrich Gauss (1777-1855) impara a leggere e contare alla tenera età di tre anni. Presto famoso per i suoi calcoli e le sue predizioni astronomiche, diventa professore all'Università di Göttingen dove si afferma come il maggior matematico dell'epoca. Saprà usare la sua intelligenza anche a fini pratici: nella biblioteca di Göttingen studia con cura le notizie finanziarie; grazie ad attente speculazioni in borsa accumulerà una fortuna notevole che amministrerà oculatamente sino alla fine dei suoi giorni.

Gauss fece sostanzialmente le stesse scoperte di Lobačevskij e di Bolyai, ma parecchi anni prima. Stese qualche nota e ne fece parola ad amici in alcune lettere, senza però mai arrischiarsi a pubblicarle "ufficialmente". A suo dire, la geometria non euclidea non poteva avere reale esistenza.

Stranamente, Gauss, Lobačevskij e Bolyai non pensano di esplicitare le conseguenze dell'ipotesi opposta, quella cioè per cui la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi. Già dall'Antichità si sapeva che su una sfera la somma degli angoli di un triangolo costituito da tre archi di cerchio

4. Vedi P.J. Davis, R. Hersch, *L'esperienza matematica*, tr. it. Edizioni Comunità, Milano 1985.

Triangoli cosmici

Gauss è il primo a controllare la curvatura dello spazio fisico misurando la somma degli angoli di un triangolo piuttosto grande. Nel corso degli anni Venti dell'Ottocento compie una precisa rilevazione del triangolo avente come vertici le vette del Brocken, dello Hohehagen e dell'Inseberg, nel sud della Germania. L'ipotenusa misura 100 km. Gauss trova che la somma degli angoli è pari a 179° 59′ 59,32″ e ne conclude che, a meno di errori d'osservazione, lo spazio intorno alla Terra è euclideo.
Una versione contemporanea del metodo di Gauss per misurare direttamente la curvatura dello spazio consisterebbe nel lanciare sei razzi nel piano dell'equatore, che dovrebbero allontanarsi dalla Terra in modo radiale, restando perfettamente equidistanti tra loro (figura 27.2). Si avrebbe così un insieme di triangoli equilateri. Se lo spazio fosse piatto, la distanza tra ciascuna coppia di razzi aumenterebbe, restando uguale alla loro distanza dalla Terra, che aumenterebbe a sua volta. Se lo spazio fosse sferico, la distanza tra i razzi crescerebbe più lentamente della loro distanza dalla Terra; mentre se lo spazio fosse iperbolico, la distanza tra i razzi crescerebbe più velocemente della loro distanza dalla Terra. Tale metodo combina la misura della somma degli angoli di un triangolo e quella della circonferenza di un cerchio. Infatti, i razzi resterebbero su un cerchio, di modo che le loro reciproche distanze non farebbero che tradurre l'aumento della circonferenza del cerchio. Inoltre, l'angolo formato dalle rette che congiungerebbero ciascuna coppia di razzi adiacenti sarebbe maggiore o minore di 60° (valore che si ha nel caso dello spazio piatto) a seconda che la curvatura dello spazio sia positiva o negativa.
Sarebbe tuttavia vano tentare un simile esperimento, dal momento che lo scarto dalla geometria euclidea dipende dalla dimensione del triangolo considerato rispetto al raggio di curvatura dello spazio. Più il triangolo è grande, più lo scarto – se scarto vi è – è significativo. È evidente che un batterio che vivesse sulla superficie di un pallone non ne percepirebbe la curvatura e avrebbe l'impressione di trovarsi in un piano. Nel XX secolo la relatività generale ci ha insegnato che, a causa del-

27.2 Il metodo dei triangoli

Misurando le distanze tra sei razzi lanciati nel piano dell'equatore terrestre, e confrontandone l'allontanamento dalla Terra, sarebbe possibile determinare la curvatura dello spazio intorno al nostro pianeta.

l'esiguità del campo gravitazionale generato dalla Terra o dal Sole, la curvatura dello spazio intorno a noi è così debole che un triangolo di 100 km è troppo piccolo (e di molto) per evidenziarla. Qualunque altro metodo di misura locale della curvatura andrebbe incontro alle medesime difficoltà, a meno di non operare nell'intorno di un buco nero o sulla superficie di una stella a neutroni – cosa che, almeno per ora, non siamo assolutamente in grado di fare.
Le osservazioni attuali ci dicono che il raggio di curvatura medio dell'Universo è di almeno 10 miliardi di anni luce. Dovremmo allora inviare razzi che viaggiando alla velocità della luce per parecchi miliardi di anni formino triangoli grandi a sufficienza da poter rivelare direttamente la curvatura dell'Universo? Fortunatamente no! Misure di questo tipo possono essere realizzate non con razzi, ma con oggetti naturali già collocati alla distanza opportuna ed equidistanti tra loro: le macchie calde della radiazione fossile. Tale metodo è stato di recente utilizzato (esperimenti Boomerang e Maxima) per fissare limiti alla curvatura dello spazio cosmico. [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**]

massimo (l'equivalente delle rette) è sempre maggiore di 180 gradi. La "trigonometria sferica" era stata oggetto di innumerevoli trattati, utili all'astronomia di posizione prima, alla geografia e alla navigazione poi. La volta celeste appare come una sfera concava: se si vuole tracciare idealmente una retta tra due stelle, occorre utilizzare un arco di cerchio massimo passante per il centro della Terra. Analogamente, se si desidera andare da un punto della superficie terrestre a un altro assai distante, gli unici cammini autorizzati sono quelli situati sulla superficie convessa: non si può mica scavare un tunnel! Il cammino autorizzato più breve è un arco di cerchio massimo – cosa che i navigatori sanno benissimo.

Era dunque possibile constatare che la trigonometria sferica, in due dimensioni, portava a una geometria coerente, sia pure non euclidea. Perché allora questa resistenza a passare a dimensione superiore? Forse, perché ciò implica uno spazio fisico finito, ma senza frontiera, "cinturato" da rette. Fino ad allora la geometria non era la scienza *dello* spazio, bensì la scienza *delle figure nello* spazio. Estensione omogenea, indefinita, dotata di tre dimensioni, lo spazio fisico costituiva una realtà neutra che non richiedeva alcun esame. Tale visione era stata consacrata nel XVIII secolo dalla filosofia di Kant, che aveva fatto dello spazio euclideo una forma pura dell'intuizione. [▶ **p. 189, Una breve storia dello spazio**]

Bisogna attendere Bernhard Riemann (1826-1866) perché venga accettata la validità della geometria sferica a tre dimensioni. Nel 1854 il giovane matematico tiene all'Università di Göttingen la sua dissertazione inaugurale intitolata "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria". La vicenda di questa lezione è alquanto sorprendente, e mostra come le scienze, non diversamente dalla storia universale, progrediscano talvolta in maniera inattesa, grazie a scherzi del caso e circostanze fortuite.

All'età di ventisette anni, Riemann ambisce a insegnare a Göttingen; per dar prova delle proprie capacità, ciascun candidato deve presentare una dissertazione orale di fronte ai futuri colleghi. La regola vuole che il candidato proponga, qual-

che tempo prima, tre argomenti tra i quali i professori scelgono quello che giudicano più promettente. Di solito, i professori selezionano sempre il primo o il secondo argomento della lista. Per questo Riemann si era accuratamente preparato sui primi due argomenti e aveva trascurato il terzo, quello appunto sui fondamenti della geometria. Non aveva, però, fatto i conti con la presenza in commissione del grande Gauss, il quale, nonostante i settant'anni e passa, restava la figura più prestigiosa della facoltà. Ovviamente, Gauss considera il terzo argomento il più interessante. In panico per la prospettiva di doversi giocare l'intera carriera su un tema del genere, Riemann si dedica anima e corpo alla preparazione della lezione; finisce coll'ammalarsi e col mancare la data prevista per la presentazione. Ristabilitosi in aprile, può studiare per ancora sette settimane, poiché nel frattempo Gauss ha chiesto una proroga per motivi di salute. Il 10 giugno 1854 Riemann tiene finalmente la sua dissertazione orale.

In essa affronta la possibilità di una geometria in cui lo spazio sia finito benché illimitato: "L'illimitatezza dello spazio possiede [...] una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna. Da qui, però, non segue affatto l'infinità dello spazio; piuttosto, se si presuppone l'indipendenza dei corpi dal luogo e gli si ascrive così una misura di curvatura costante, lo spazio sarebbe necessariamente finito, non appena questa misura di curvatura avesse sia pure il più piccolo valore positivo. Prolungando in linee di minimo percorso le direzioni iniziali che si trovano in un elemento di superficie, si otterrebbe una superficie illimitata, con misura di curvatura costante, cioè una superficie che in una varietà piana triestesa assumerebbe la forma di una superficie sferica e dunque finita".[5]

Riemann propone anche di estendere la geometria a spazi con un numero di dimensioni qualsiasi. La geometria va per-

5. B. Riemann, "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria", tr. it. in B. Riemann, *Sulle ipotesi della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, a cura di R. Pettoello, Bollati Boringhieri, Torino 1994, pp. 3-20.

ciò concepita come studio delle possibili "varietà". Nell'accezione più generale, una varietà non è nulla di più che una collezione di oggetti di un insieme. La geometria diventa lo studio delle regole e delle condizioni poste agli oggetti dell'insieme al fine di determinare le distanze tra gli elementi.

Per esempio, in uno spazio bidimensionale ogni punto è definito in maniera univoca da una coppia ordinata di numeri reali (x_1, x_2): le sue coordinate. Nello spazio tridimensionale ogni punto è definito in maniera univoca da una tripla di numeri reali (x_1, x_2, x_3). In uno spazio astratto a n dimensioni ogni punto è definito in maniera univoca da una n-pla $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, insieme ordinato di n numeri reali. Le regole per determinare le distanze tra gli elementi dell'insieme sono riassunte nella *metrica* – una sorta di teorema di Pitagora generalizzato i cui coefficienti definiscono la curvatura dello spazio.

Riemann non è soltanto l'autore della più profonda lezione della storia della geometria; nel 1858 realizza un exploit di prim'ordine, con un articolo di otto pagine altrettanto innovativo sulla teoria dei numeri. Forse, gli sarebbe riuscito un terzo exploit se non fosse morto di tubercolosi all'età di trentanove anni.

La dissertazione inaugurale di Riemann fu pubblicata solo nel 1867, un anno dopo la morte. Passa ancora un anno, e l'italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) completa l'edificio della geometria non euclidea: il suo modello di "pseudosfera", che descrive uno spazio iperbolico di curvatura negativa costante per mezzo di un'equazione analoga a quella dell'ipersfera, evidenzia la natura comune delle ipotesi di Bolyai-Lobačevskij e di Riemann. È aperta così la via a Clifford, Einstein, Weyl e altri che modellizzeranno fenomeni naturali come la gravitazione in termini di geometria non euclidea.

LETTURA CONSIGLIATA

B.A. ROSENFELD, *A History of Non Euclidean Geometry*, Springer Verlag, New York 1988.

28

COSMOS E *LOGOS*

> È un cosmo a contenere la diversità e a essere la Natura.
>
> WALT WHITMAN

Il discorso sul *cosmos* ha cambiato notevolmente oggetto nel corso della storia. Omero impiega la parola per descrivere l'abbigliamento delle donne, gli ornamenti del guerriero, la struttura di un poema, il bell'aspetto fisico, morale o sociale.[1] La nozione di cosmo applicata all'organizzazione dell'Universo compare in Pitagora e negli altri presocratici, verso il VI secolo a.C., per designare ordine e bellezza del mondo. La realtà non è più il caos che delineava due secoli prima Esiodo nella *Teogonia*; al contrario, è bella e ordinata. Nel poema *Sulla natura* Eraclito afferma: "Tra le cose disseminate a caso, la più bella: il cosmo". Nel *Timeo* Platone fa del cosmo l'immagine di un modello intelligibile, e nel suo *Del cielo* Aristotele impiega il termine *cosmos* per indicare l'ordine celeste.

I filosofi dell'Antichità sono i primi a speculare sull'organizzazione generale dell'Universo, sulla natura dello spazio, del tempo e della materia, ovvero ad applicare il *logos* – ragione umana incarnata nel linguaggio – al *cosmos*. In breve, sono i primi a fare "cosmologia". Ci vorranno, tuttavia, due millenni perché un tale discorso sull'Universo porti questo nome.

1. Quest'ultima accezione si ritrova nel latino *mundus*, e l'aggettivo "mondano" che ne deriva conserva l'immagine delle "belle maniere".

Il termine inglese *cosmology* compare per la prima volta solo nel 1656, nel dizionario *Glossographic* di Thomas Blount, in cui è definito come il discorso sul mondo, in esatta corrispondenza all'etimologia. È ripreso, in latino, nell'opera di Christian Wolff, *Cosmologia generalis* (1731): "La cosmologia generale è la scienza del mondo o dell'universo in generale, nella misura in cui questo è un essere composto e modificabile".

Wolff si sforza di affrontare la questione della natura fisica del mondo affrancandosi il più possibile dal mito e dalla religione. Ciò malgrado, nella storia successiva della cosmologia gli verrà mossa di continuo l'accusa di aver mescolato enunciati fisici con riflessioni filosofiche e religiose. Il termine francese è utilizzato per la prima volta da Pierre de Maupertuis (*Essai de cosmologie*, 1750), il quale, però, dopo aver constatato che i filosofi hanno sempre voluto spiegare il sistema del mondo, afferma che per gli esseri umani è impossibile giungere a una soluzione completa del problema. L'anno successivo, il termine *cosmologie* viene consacrato nell'*Encyclopédie* e Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, autore dell'articolo, osserva che l'argomento non è degno di particolare interesse, poiché si riduce alla questione di sapere se si possa trovare Dio nella natura. Per Kant (*Critica della ragion pura*) "nessuna osservazione potrebbe confermare la tesi della cosmologia razionale, il cui oggetto trascende ogni esperienza possibile". Nel XIX secolo Auguste Comte ribadirà che l'unico studio possibile è quello del Sistema solare, mentre quello dell'Universo è destinato a restare per sempre precluso.

Si capiscono così le reticenze dei positivisti nei confronti della disciplina. Se l'astronomia ha per compito di parlare degli astri e della loro organizzazione, di che cosa mai può trattare la cosmologia? Forse, di ciò che si cela dietro tale organizzazione? Se così fosse, ricadremmo nell'idea di Essere sommo e in questioni di carattere teologico. Deve allora occuparsi della posizione che noi, esseri umani, abbiamo in tale organizzazione? Se questa non è una ritirata nella religione, lo è almeno nella filosofia. E lo stesso vale per interrogativi del tipo: l'Universo è nato e, se sì, quando e come?

In breve, se ci si interessa dell'Universo e non si dispone di

un telescopio, che cosa si può dire? Vi è un terzo genere di discorso, oltre a quello teologico e filosofico, che si è arrischiato ad affrontare l'argomento: la letteratura. Ma per quest'ultimo si tratta per lo più di utilizzare l'immagine del cosmo stabilita nelle varie epoche per elaborare racconti mitici, fantasie immaginarie o discorsi utopici. I "viaggi cosmici"[2] immaginati da Cicerone (*Il sogno di Scipione*), Ildegarda di Bingen (*Scivias*), Dante (*La Divina Commedia*) o Cyrano de Bergerac (*L'altro mondo*) erano compiuti da figure eccezionali, capaci di raccontare la loro esperienza di ciò che esperibile non è; giacché, per parlare dell'Universo nella sua interezza bisogna poterne uscire. Ma, col crollo del sistema del mondo chiuso di aristotelica memoria, ciò diviene impensabile. L'Universo si confonde ora con lo spazio infinito di Newton. La sua parte osservabile cresce senza posa, ma i suoi più lontani recessi paiono per sempre inattingibili all'esperienza umana. Le considerazioni circa l'organizzazione generale dell'Universo non possono essere sostenute da alcuna osservazione propriamente cosmologica. I modelli poggiano necessariamente su presupposti metafisici. È il caso, come è noto, della cosmologia newtoniana e delle sue riformulazioni per opera di Wright, di Lambert e degli altri cosmologi del XVIII e XIX secolo.[3]

La situazione cambia radicalmente nel XX secolo, con l'avvento della relatività generale. L'Universo assume un volto nuovo: non è più una cornice che contiene degli oggetti, bensì è l'insieme cornice-oggetti. Per la prima volta diviene lecito pronunciare un discorso razionale sul tutto. In particolare, la cosmologia relativistica confuta l'argomentazione di Kant e di Comte: è possibile determinare sperimentalmente i parametri cosmologici fondamentali, e persino dimostrare il carattere finito dello spazio.[4]

Non si creda, però, che con la cosmologia relativistica si sia

2. Vedi J.-P. Luminet, *Les Poètes et l'Univers*, Le Cherche-Midi, Paris 1996.

3. Vedi al riguardo il capitolo "Heptaméron", in M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, *Figures du Ciel*, Le Seuil, Paris 1998.

4. A condizione che sia corretta l'ipotesi di omogeneità.

sciolto il legame tra fisica e filosofia. La cosmologia non è mai innocente. Per quanto sofisticato sia il formalismo matematico su cui si basa, presuppone sempre una filosofia della natura, in virtù della quale può attribuire al mondo una forma, una struttura, un ordine. Il significato del termine *Universo*, sinonimo del greco *cosmos*, ma di origine latina, contiene le nozioni di unità e di molteplicità. L'Universo è l'unità del molteplice. Ma vi è unità del molteplice solo se esistono leggi naturali universali. Tali leggi sono ritenute agire in ogni punto dello spazio e in ogni istante del tempo, ed essere dunque indifferenti allo spaziotempo. Riuniscono ciò che lo spazio e il tempo sembrano disperdere. Per molti dei fisici alla ricerca dell'unità, la cosmologia ha come fine quello di spiegare la straordinaria molteplicità visibile nell'universo materiale – dalle particelle elementari fino ai superammassi di galassie – tramite un'unità soggiacente, ossia un determinato ordine nascosto, una determinata armonia.

Lo stesso Einstein, padre di quella relatività generale che ancor oggi costituisce la principale base scientifica per qualsiasi studio cosmologico, non è esente da presupposti metafisici. Nel 1917, tra le numerose soluzioni possibili delle sue equazioni, ne sceglie una, molto particolare, che descrive un universo finito e statico, sulla base di mere ragioni estetiche. Tale scelta gli impedirà di cogliere lo "strato" ultimo che conferisce alla cosmologia relativistica lo *status* di scienza sperimentale: la scoperta, con l'espansione, che il "tutto" evolve, che l'Universo ha una storia – per davvero, non una semplice creazione e poi più nulla. Tale storia, testimoniata da ogni galassia, da ogni radiazione e da ogni elemento, può essere oggetto di una descrizione razionale.

Un altro esempio dei presupposti che sottendono gli odierni modelli relativistici di universo è il "principio cosmologico", in base al quale non esiste alcuna posizione privilegiata nello spazio; a rigore non può essere dimostrato, poiché noi non osserviamo mai una sezione di spazio simultaneo: ogni osservazione ci immerge nel passato dell'Universo.

Il compito del cosmologo contemporaneo è quello di elaborare una descrizione coerente dell'universo osservabile.

Che ciò sia possibile non è affatto evidente. A metà degli anni Settanta il fisico svedese Hannes Alfvén ha sottoposto la cosmologia a una feroce critica epistemologica. È rimasta mito o è infine divenuta scienza? Ma come è possibile costruire la scienza di un oggetto unico? Come si può studiare un oggetto da cui, per definizione, non si può uscire per guardarlo da lontano?[5] L'innegabile autorità di Alfvén, premio Nobel per la fisica nel 1970, ha creato in non poche persone seri dubbi circa la validità del modo di procedere della cosmologia.

Certo, molte delle affermazioni cosmologiche pronunciate dai cantori della disciplina prestano il fianco a critiche epistemologiche. Per esempio, si legge spesso, persino nelle riviste più autorevoli e in articoli firmati da professionisti di provata competenza, che il Big Bang è la violenta esplosione da cui ha avuto origine l'Universo. Tale definizione non solo confonde l'inizio dell'Universo (che sfugge a ogni linguaggio) con l'inizio dell'intelligibilità dell'Universo, ma impiega i termini in accezione impropria.

Ancor più criticabili, se non pericolosi, sono i commenti cui ha dato luogo la scoperta delle fluttuazioni della radiazione cosmica, resa possibile dal satellite COBE nel 1993: "Per chi è credente, è come vedere il volto di Dio", "Abbiamo trovato il Santo Graal della fisica", "È la più grande scoperta di tutti i tempi". Non si tratta di dichiarazioni di visionari che hanno creduto di scovare il volto del Signore nella mappa inviataci da COBE, bensì di affermazioni di illustri cosmologi. Simili collusioni tra cosmologia e fede, scienza e spettacolo, non aiutano il grande pubblico a chiarirsi le idee. Piuttosto, sono indizi di come sia difficile per alcuni sbarazzarsi del retaggio filosofico-mistico che grava sui discorsi sul "tutto", e sembrano così giustificare, nonostante due secoli di "progressi", la critica di d'Alembert. Quanto a me, giudico questi eccessi, in alcuni, segno di grande ingenuità, in altri, che ingenui non sono, frutto di astuzia mediatica!

5. Anche le neuroscienze si sono scontrate con argomenti di questo tipo: a detta di alcuni un cervello umano non potrebbe mai accedere alla conoscenza oggettiva del cervello umano. Tuttavia, il cervello umano ha più di una freccia al suo arco...

29
QUESTIONI COSMICHE

Perché? Da dove viene l'Universo? Dove va?
JULES LAFORGUE

La cosmologia contemporanea è costituita da tre grandi domini:
– la cosmologia *geometrica*, che specula sulle proprietà locali e globali dello spazio-tempo, della sua forma e delle sue frontiere, singolarità e orizzonti inclusi;
– la cosmologia *fisica*, che tratta dei processi materiali che si svolgono nell'Universo a questo o quello stadio della sua evoluzione;
– la cosmologia *osservativa*, che indaga i fatti bruti: spostamento spettrale delle galassie, radiazione cosmica di fondo, distribuzione dei quasar, degli ammassi delle galassie e delle grandi strutture.

La cosmologia osservativa è il risultato di un osservatore localizzato in una piccola regione dell'Universo, che accede soltanto a un'informazione estremamente parziale dell'intero spazio-tempo. Per questo egli non può fare a meno di chiedersi: l'universo osservabile possiede proprietà che riflettono quelle dell'Universo in generale, oppure tali proprietà dipendono dalla posizione particolare dell'osservatore?

La questione circa la natura infinita dello spazio, o il suo carattere esattamente euclideo, è di pertinenza esclusiva della

cosmologia geometrica, poiché nessuna delle misure che si possono effettuare sull'universo osservabile potrà mai consentire di rispondervi. Di contro, pur essendo di carattere geometrico, la questione circa la natura finita dello spazio potrebbe essere chiarita sperimentalmente. [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**] Quanto alla cosmologia fisica, alcune proprietà non direttamente osservabili possono svolgere un ruolo importante, e lasciare tracce misurabili. Per esempio, le imperfezioni topologiche che hanno potuto formarsi nell'Universo primordiale (stringhe cosmiche, increspature e grumi) possono lasciare impronte specifiche nelle fluttuazioni di temperatura della radiazione cosmica di fondo. Analogamente, la natura chiusa dello spazio (indipendentemente dal fatto che sia dovuta alla sua curvatura o alla sua topologia) a una scala attualmente *maggiore* dell'orizzonte può, malgrado tutto, aver avuto effetti nel passato lontano dell'Universo, e ripercuotersi oggi nella distribuzione a grande scala delle galassie o di altre caratteristiche osservabili dell'universo.

Storicamente, la cosmologia geometrica ha occupato presto la scena. Per almeno due motivi. Il primo è che, finché Galileo non impiegò il cannocchiale astronomico e Newton non elaborò la teoria matematica della gravitazione, osservazione e ragionamento fisico erano assenti nell'indagine cosmologica. Essa poggiava quasi esclusivamente su presupposti filosofici, come quello dell'armonia geometrica, o religiosi. [▶ **p. 225, *Cosmos e logos***]

Il secondo riguarda il significato stesso della geometria: se stiamo all'etimo, *geometria* vuol dire "misura della Terra", ossia, per estensione, "misura del mondo, misura dell'universo". La misura ha sempre avuto la preminenza nella pratica scientifica. La cosmologia, scienza dell'oggetto Universo, comincia anzitutto dalla sua misura. E poiché l'Universo ha non soltanto estensione, ma anche durata, occorre saper misurare non solo lo spazio, bensì anche il tempo.

Inoltre, allorché si parla di misura si arriva inevitabilmente a parlare dei limiti dell'oggetto da misurare, e ad affrontare così le domande che sfidano l'immaginazione umana:

– Che cos'è lo spazio?
– Che cos'è il tempo?
– Che cos'è il vuoto?
– Il tempo ha avuto inizio?
– L'Universo ha una fine?
– Lo spazio è infinito?
– Il Big Bang ha avuto davvero luogo?
– Vi era qualcosa prima del Big Bang?
– Di che cosa è costituita la materia dell'Universo?
– Quando hanno cominciato a formarsi stelle e galassie?
– Lo spazio ha dimensioni supplementari nascoste?
– Esistono altri universi?
Eccetera.

A tali domande non possiamo dare risposte certe; però, possiamo almeno scartare molti modelli e molte teorie, e riportare le soluzioni plausibili fornite dalla cosmologia relativistica. Armate delle loro virtù e delle loro debolezze, tali soluzioni (in cui rientrano i modelli del Big Bang) restano idealizzazioni dell'Universo reale.

30

L'ESPANSIONE E L'INFINITO

Lo spazio a sé identico, s'accresca o si neghi.
STÉPHANE MALLARMÉ

L'Universo è in espansione. Che cosa davvero vuol dire tutto ciò? La maggior parte delle persone pensa a una grande esplosione, come suggerisce, del resto, la locuzione *Big Bang*; la metafora è ripresa di continuo sia nei convegni scientifici sia nei testi di divulgazione. Alcuni conferenzieri non si trattengono addirittura dal mimare con le mani la dilatazione, quasi ad afferrare una porzione di spazio o un pallone immateriale in procinto di gonfiarsi. Il pubblico si immagina della materia sparata da un centro a velocità prodigiosa, e si sente dire che, per fortuna, non c'eravamo al momento dell'esplosione, altrimenti saremmo stati crivellati da particelle... Che sciocchezze. Al Big Bang, nessun punto dell'Universo prende parte a un'esplosione. Semplicemente, se si considera un punto qualsiasi, si constata che i punti vicini si allontanano da esso. Ciò significa che tali punti sono dotati di un movimento, di una velocità? Nient'affatto. Sono assolutamente fissi, eppure si allontanano.

Per dissipare il paradosso occorre precisare cosa si intenda esattamente con "punto fisso". La posizione di un punto è indicata da coordinate: un numero su una linea (il chilometraggio di un'autostrada), due numeri su una superficie (latitudine e longitudine), tre numeri nello spazio (lunghezza, larghezza, al-

tezza). Un punto è detto "fisso" se le sue coordinate non cambiano nel corso del tempo. In qualunque spazio, curvo o meno che sia, la distanza tra due punti è una formula chiamata metrica, la quale dipende dalle coordinate e generalizza il teorema di Pitagora. In linea di principio, dunque, la distanza tra due punti fissi non cambia. Nello spazio in espansione, invece, tale distanza aumenta; ma i punti non si spostano di un millimetro, nel senso che conservano rigorosamente le stesse coordinate. Queste coordinate fisse sono dette "comobili". Nella cosmologia relativistica le galassie restano collocate in posizioni comobili nello spazio. Possono disegnare lievi arabeschi intorno a queste posizioni, sotto l'effetto di campi gravitazionali locali, ma il movimento che le allontana le une dalle altre risiede nella letterale espansione dello spazio che le separa. È una forma di movimento di cui nessun essere umano ha mai fatto esperienza. Non sorprende che la nostra intuizione vi si ribelli, e cerchi altre interpretazioni, meno radicali. Del resto, quando Fridman (1922) e Lemaître (1927) hanno scoperto che l'espansione dell'Universo era resa possibile dalle leggi della relatività generale, pretendendo che questo modello descrivesse la realtà fisica, molti li hanno criticati – e tra i primi vi era lo stesso Einstein...

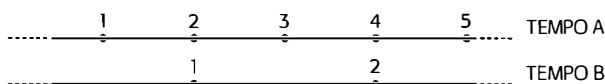
Se lo spazio è in espansione, sembrerebbe a prima vista dover essere finito: sia perché lo si visualizza tramite una sorta di grosso pallone che si gonfia in uno spazio esterno; sia perché si parte dal principio che una cosa in espansione deve necessariamente aumentare di taglia e che, se questa cosa ha una taglia, deve essere necessariamente finita. Da ciò si inferisce pure, a torto, che al Big Bang l'Universo nel suo insieme era necessariamente contratto in un punto di volume nullo.

Ora, i sistemi infiniti possono essere perfettamente in espansione o in contrazione. Ma in che modo può dilatarsi qualcosa che occupa uno spazio infinito? E a partire da che? Me lo chiedono spesso. Per cercare di spiegarlo, cominciamo da un esempio piuttosto semplice, quello di un universo a una sola dimensione: matematicamente parlando, si tratterebbe di una retta su cui ogni galassia sarebbe rappresentata da un numero.

A un dato istante (al tempo A) le galassie sono separate da

intervalli uguali, il che significa che la loro distribuzione è omogenea. Se l'Universo è in espansione, all'istante seguente (al tempo B) la galassia inizialmente indicata con 1 occupa la posizione che aveva la galassia indicata con 2, mentre la galassia 2 si trova ora dove era inizialmente la galassia 4, e così via. Si ha così a che fare con un'espansione uniforme entro uno spazio infinito contenente un numero infinito di galassie. Se si risale indietro nel tempo per descrivere il Big Bang, tutte le galassie si riavvicinano le une alle altre, e quando si toccano tutte, lo spazio è sempre rappresentato da una retta di lunghezza infinita!

1 2 3 4 5 TEMPO A

1 2 TEMPO B

Generalizzando a tre dimensioni, possiamo capire in modo analogo come, se lo spazio è infinito, il Big Bang, cioè l'inizio dell'espansione, sia avvenuto in ciascun punto di uno spazio *preliminarmente* infinito, per quanto compresso fosse. Se ritagliassimo lo spazio infinito in cubi, ciascuno di questi cubi diventerà in futuro un cubo più grande, o in passato un cubo più piccolo; nessun cubo è al centro dello spazio infinito.

Ma come può uno spazio infinito dilatarsi o contrarsi, e occupare sempre lo *stesso* volume? Il matematico tedesco David Hilbert ha individuato un'analogia molto semplice. Immagina un albergo con un numero infinito di stanze, tutte occupate. Arriva un nuovo cliente. Dove alloggiarlo? Nessun problema! L'addetto alla reception non deve far altro che trasferire il cliente della camera 1 nella camera 2, il cliente della 2 nella 3, e così via. L'ultimo arrivato potrà prendere possesso della camera 1. Immaginiamo ora che sbarchino pullman su pullman di turisti, in numero infinito. Di nuovo, l'addetto alla reception può soddisfare le richieste di tutti: sposta il cliente della 1 nella 2, quello della 2 nella 4, quello della 3 nella 6, e così via. In tal modo, una camera su due risulta libera (tutte quelle che hanno numero dispari!).

Proprio come l'"albergo di Hilbert" uno spazio infinito può ricevere una quantità supplementare di spazio senza essere più "stretto".

31

GALASSIE IN FUGA

> La galassia in fuga è una trota arcobaleno che risale il corso del tempo alla ricerca di acque più basse, degli oscuri recessi del passato.
>
> CHARLES DOBZYNSKI

Dall'epoca di Newton sappiamo che la luce bianca, passando attraverso un prisma si scompone in uno spettro di tutti i colori. Il violetto e il blu corrispondono alle minime lunghezze d'onda o, il che è lo stesso, alle massime frequenze; il rosso corrisponde alle massime lunghezze d'onda, ovvero alle minime frequenze. Nel 1814 il fisico tedesco Joseph Fraunhofer (1787-1826) scopre che lo spettro della luce delle stelle è striato da sottili righe oscure, mentre quello della luce di una candela è di righe brillanti. Il fenomeno resterà un enigma sino al 1859, quando il chimico Robert Bunsen (1811-1899) e il fisico Gustav Kirchhoff (1824-1887) analizzano la luce creata dalla combustione di varie sostanze chimiche (riscaldate con un bruciatore alquanto simile a quello che noi oggi conosciamo come "bruciatore Bunsen") e scoprono che ciascuna di esse emette una luce con uno specifico spettro.

Parallelamente, Christian Doppler (1805-1853) scopre nel 1842 che il movimento di una sorgente sonora produce spostamenti di frequenza nelle onde acustiche – un fenomeno di cui chiunque di noi fa esperienza quando sente la sirena di un'autoambulanza che passa. Il fisico francese Armand Fi-

zeau (1819-1896) constata lo stesso fenomeno nel caso delle onde luminose: a seconda che una sorgente di luce si avvicini o si allontani, le frequenze ricevute aumentano o diminuiscono rispetto alle frequenze emesse. Lo spostamento è direttamente proporzionale alla velocità con cui la sorgente si avvicina o si allontana. Se si avvicina, la frequenza aumenta, la luce diventa più "blu"; se si allontana, la frequenza diminuisce e le lunghezze d'onda si spostano, diventando più "rosse" rispetto allo spettro della luce visibile. Dal momento che investe in eguale quantità l'insieme dello spettro, tale spostamento è facilmente reperibile nelle righe scure o brillanti che sono spostate in blocco, o verso il blu o verso il rosso, e fornisce uno strumento inestimabile per misurare le velocità di avvicinamento o di allontanamento di sorgenti luminose.

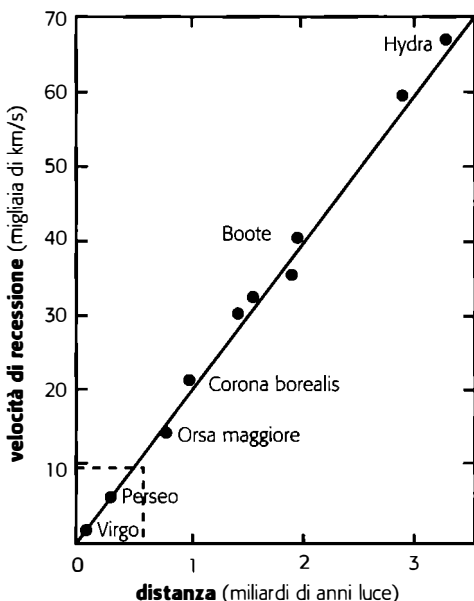
Poco dopo questa scoperta gli astronomi avviano un ambizioso programma di spettroscopia, volto a misurare le velocità dei pianeti e delle stelle tramite i loro spostamenti spettrali.

La formula dell'effetto Doppler-Fizeau è molto semplice:

$$v = cz$$

dove v è la velocità della sorgente, c la velocità della luce (300.000 km/s) e z il relativo spostamento in lunghezza d'onda, vale a dire la differenza tra la lunghezza d'onda ricevuta e la lunghezza d'onda emessa, divisa per la lunghezza d'onda emessa.[1]

Le velocità proprie dei corpi celesti, si tratti di pianeti, di stelle o di galassie, non superano qualche centinaia di chilometri al secondo, che è poco rispetto alla velocità della luce. L'effetto Doppler-Fizeau è pertanto debole: ci vuole uno spettroscopio piuttosto preciso per misurarlo. Ma immaginiamo per un momento un universo in cui la velocità della luce sia soltanto di 1000 km/s; il cielo offrirebbe alla vista uno spettacolo straordinario: le stelle cambierebbero colore, poiché

1. Per gli amanti delle formule: $z = (\lambda_0 - \lambda_e) / \lambda_e$, dove λ_0 è la lunghezza d'onda ricevuta e λ_e la lunghezza d'onda emessa. Si vede immediatamente che, se la sorgente si allontana, z è positivo; mentre, se essa si avvicina, z è negativo.

31.1 La relazione distanza-velocità

Nel corso degli anni Venti del Novecento le misure dello spostamento cosmologico nello spettro riguardavano soltanto galassie relativamente vicine, appartenenti all'ammasso della Virgo e di Perseo. Le misure successive si sono estese a galassie ben più lontane, come Boote e Hydra. La relazione di proporzionalità permane fino a 3 miliardi di anni luce. Oltre, la curvatura dello spazio incurva la retta verso il basso o verso l'alto.

quelle in fuga si trasformerebbero in rubini, quelle in avvicinamento in ametiste!

Nel secondo decennio del XX secolo astronomi americani come Vesto Slipher (1875-1969) ed Edwin Hubble (1889-1953) applicano il programma sistematico di misura delle velocità alle galassie spirali – le quali presentano spostamenti spettrali simili a quelli delle stelle. Dal momento che le velocità derivate dalla formula Doppler-Fizeau non superano qualche centinaia di chilometri al secondo, nessuno mette in discussione il fatto che gli spostamenti nello spettro delle galassie indichino la velocità dei loro movimenti rispetto alla Terra, come per le stelle.

Tuttavia, nel corso degli anni Venti vengono scoperte delle galassie spirali i cui spostamenti spettrali, orientati sistematicamente verso il rosso, superano lo 0,1; il che implica velocità di fuga maggiori di 300.000 km/s! In una lettera inviata a de Sitter, nel 1931, Hubble esprime la sua preoccupazione: "Noi impieghiamo il termine di *velocità apparente* in modo da insistere sul carattere empirico della correlazione. Ma siamo consapevoli che l'interpretazione vada lasciata a persone come voi e poche altre, che sono competenti per discutere autorevolmente di questo argomento". Di fatto, sarà Georges Lemaître che, nel 1927, comprenderà per primo che il movimento delle galassie non corrisponde a velocità "fisiche": semmai, è lo spazio che si dilata, trascinando con sé le galassie in un movimento di fuga apparente. [▶ p. 247, Il tasso d'espansione]

Benché la prospettiva teorica sia radicalmente cambiata, la tentazione di interpretare questo spostamento verso il rosso in termini di effetto Doppler-Fizeau resta ancora forte. Locuzioni come "velocità di recessione" o "velocità di fuga" sono presto adottate da astronomi e da divulgatori. Tali velocità paiono una conseguenza del tutto naturale del movimento d'espansione della materia seguito al Big Bang. Si immagina una sorta di fuoco d'artificio iniziale che scaglierebbe le galassie ai quattro angoli dell'Universo, come se fossero i resti di un'esplosione: appollaiati su una delle braci raffreddate, contempleremmo le altre allontanarsi da noi a grandissima velocità. Quest'immagine, però, è erronea e conduce a un'interpretazione fisica dello spostamento verso il rosso cosmologico completamente sbagliata. Le galassie rilevate dagli astronomi nell'esplorazione via via più approfondita dell'Universo presentano spostamenti verso il rosso sempre maggiori. Nel 1930 Hubble era turbato da spostamenti verso il rosso di 0,1. Che cosa dovremmo dire noi del quasar scoperto all'inizio del 2001 con $z = 5{,}82$? Le tecniche progrediscono, e i record cadono di mese in mese. Sempre nel 2001 un gruppo di ricerca internazionale ha analizzato i dati offerti dal telescopio spaziale Hubble e ha stilato un catalogo di centoventitré galassie i cui spostamenti spettrali sono misurati nel dominio dell'infrarosso. Sono state identificate ga-

lassie che presentano spostamenti spettrali incomparabilmente superiori rispetto a quelli misurati sino ad allora: diciassette galassie hanno spostamenti compresi tra 5 e 10, e cinque hanno spostamenti superiori a 10!

Se ci si attiene alla formula Doppler-Fizeau, queste galassie dovrebbero fuggire a velocità cinque o dieci volte superiori a quella della luce – il che è assurdo. Stando alla teoria della relatività, nessun oggetto può viaggiare più veloce della luce. Anche in un modello newtoniano, in cui la velocità non sarebbe vincolata da alcun limite, qualunque galassia *osservata* avrebbe obbligatoriamente una velocità di fuga inferiore a quella della luce: diversamente, i suoi raggi luminosi non avrebbero il tempo di arrivare fino a noi, poiché la distanza da percorrere aumenterebbe più velocemente della loro velocità!

Dunque, è sbagliato ricorrere alla formula dell'effetto Doppler-Fizeau per rendere conto dello spostamento verso il rosso cosmologico. Parecchi professori di fisica e astronomi ritengono di potersi legittimamente appellare alla cosiddetta formula dell'"effetto Doppler-Fizeau relativistico", la quale corregge la prima in modo che le galassie che presentano un grande spostamento nello spettro abbiano velocità inferiori a quella della luce.[2] L'idea è che, a grandi velocità, se si vuole interpretare correttamente il mondo, la relatività ristretta deve sostituire la meccanica newtoniana. Utilizzando la formula relativistica un quasar con $z = 4$ ha una velocità di fuga uguale al 92% della velocità della luce, e ogni cosa sembra tornare a posto. Così facendo, però, si finisce per rimpiazzare una spiegazione inesatta con un'altra, anch'essa inesatta. Calcolare in quel modo la velocità del quasar significa presupporre che la relatività ristretta possa essere applicata alla scala cosmologica; si tratta, però, di una teoria dello spazio-tempo piatto, senza gravitazione, mentre in cosmologia la curvatura dello spazio-tempo svolge un ruolo essenziale.[3]

2. Sempre per gli amanti delle formule: $1 + z = (1 + v/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. Anche se lo spazio ha curvatura nulla, l'Universo in quanto spazio-tempo ha una curvatura non nulla da quando è in espansione.

Assimilare gli spostamenti cosmologici verso il rosso a un effetto Doppler-Fizeau, relativistico o meno, conduce a uno spiacevole fraintendimento della cosmologia del Big Bang, e non permette di cogliere una delle sue più misteriose bellezze.

La cosmologia del Big Bang si basa sulla teoria della relatività generale, che va oltre sia la meccanica di Newton sia la relatività ristretta, e introduce concetti che non hanno equivalenti nelle teorie precedenti. Tali concetti non sono facilmente accessibili ai comuni mortali, poiché la nostra intuizione è stata plasmata dall'evoluzione naturale in un mondo a basse velocità e a debole gravità.

Come la costanza della velocità della luce porta a enunciati sorprendenti, ma veri (si pensi al paradosso dei gemelli), così la curvatura dello spazio-tempo possiede il proprio zoo di fenomeni. Uno di questi implica il rallentamento degli orologi in un campo gravitazionale. Tale "spostamento verso il rosso gravitazionale" si produce quando la lunghezza d'onda della luce emessa dalla superficie di un corpo massivo è spostata verso lunghezze d'onda maggiori durante il suo tragitto verso l'osservatore. Tale spostamento non ha nulla a che vedere con un qualunque effetto Doppler-Fizeau, poiché l'osservatore non è in movimento relativo rispetto al corpo che emette il segnale.

Lo spostamento verso il rosso cosmologico è un altro dei fenomeni specifici della relatività generale, che non ha alcuna controparte fisica né in meccanica newtoniana né in relatività ristretta. In base all'interpretazione suggerita inizialmente da Lemaître, non sono le galassie ad andarsene nello spazio a mo' di proiettili, ma è il tessuto spaziale che si dilata. Lo spostamento verso il rosso cosmologico risulta dal fatto che il raggio di curvatura dell'Universo era minore in passato, quando l'Universo era più giovane. Il raggio di curvatura è misurato da un "fattore di scala" a che aumenta nel corso del tempo. È, per esempio, il raggio della sfera che delimita l'universo osservabile. Poiché lo spazio si dilata, a aumenta nel tempo; le onde luminose che provengono dal passato sono state stirate durante il cammino, tra l'istante in cui sono state emesse da una ga-

lassia lontana e l'istante in cui le rileviamo. La formula corretta dello spostamento verso il rosso cosmologico diventa:

$$1 + z = a_0/a_e$$

dove a_0 è il raggio di curvatura dell'Universo attuale, mentre a_e è il raggio di curvatura dell'Universo all'epoca in cui è stata emessa la luce dalla galassia.

Non vi è qui alcuna contraddizione. Esplorando il passato sempre più lontano dell'Universo, la cosmologia del Big Bang predice un raggio di curvatura a_e che tende a zero, ossia spostamenti cosmologici verso il rosso che tendono all'infinito.

I valori massimi attualmente osservati per le galassie si avvicinano a $z = 10$, ma la cosmologia contemporanea ha scoperto una sorgente ben più antica, il cui spostamento verso il rosso raggiunge 1100: è la radiazione cosmica di fondo. Ciò implica che essa sia stata emessa a un'epoca in cui il raggio di scala era 1100 volte minore di quello odierno.[4] [▶ **p. 311, La radiazione fossile**]

La frontiera dell'Universo osservabile, l'orizzonte cosmologico, corrisponde necessariamente al limite in cui lo spostamento verso il rosso è infinito. Ciò non impedisce che, in determinati modelli d'Universo, lo spazio possa essere immenso e accogliere galassie situate a centinaia di miliardi di anni luce da noi. Ma noi non possiamo riceverne alcuna radiazione: in termini di velocità di espansione, queste regioni lontane si dilatano a una velocità superiore a quella della luce.[5]

4. Per derivarne una scala di tempo corrispondente nella storia dell'Universo, come spesso si fa nei testi divulgativi, bisogna servirsi di un modello assai particolare, i cui parametri di curvatura, vale a dire la densità e la costante cosmologica, sono fissati. Per valori plausibili di questi parametri, l'epoca di emissione è compresa tra 300.000 e 1 milione di anni dopo il Big Bang.

5. In relatività generale lo spazio può dilatarsi a una velocità superiore a quella della luce, poiché non rappresenta né materia né energia.

32

IL TASSO D'ESPANSIONE

> Là, dove i mondi sembrano con lenti
> passi, come concorde immensa mandra,
> pascere il fior dell'etere pian piano.
>
> GIOVANNI PASCOLI

Nel 1927 Georges Lemaître pubblica negli *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* un articolo rivoluzionario: "Un universo omogeneo di massa costante e di raggio crescente che rende conto della velocità radiale di nebulose extragalattiche". Come si evince dal titolo, Lemaître mostra che un modello cosmologico relativistico di volume finito, nel quale l'Universo è in perenne espansione, spiega in maniera naturale le osservazioni degli spostamenti verso il rosso delle galassie, rimasti fino ad allora incompresi. L'articolo contiene, in particolare, un paragrafo in cui Lemaître dichiara che quarantadue galassie vicine, di cui ha misurato gli spostamenti nello spettro, si allontanano a velocità proporzionali alla distanza. Il valore numerico del fattore di proporzionalità è 575 km/s per megaparsec, il che significa che due galassie distanti 1 megaparsec (3.260.000 anni luce) si allontanano l'una dall'altra a una velocità apparente di 575 km/s, e che due galassie distanti 10 megaparsec si allontanano l'una dall'altra a una velocità apparente dieci volte superiore.

L'unità di misura chilometro per secondo per megaparsec mostra chiaramente che la velocità di fuga dipende dalla scala.

Nel suo *Libro del cielo e del mondo* (1377) Nicola d'Oresme (1323-1382) aveva notato che, risvegliandoci alla mattina, non ci renderemmo conto di nulla, se il mondo e gli esseri viventi fossero di notte cresciuti nella stessa proporzione. Nella teoria di Lemaître, invece, la separazione tra due punti dello spazio aumenta tanto più velocemente quanto più è grande la separazione, ed è ciò che la rende percepibile.

L'articolo di Lemaître, pubblicato in francese, passa inosservato fino al 1931, anno in cui viene letto da Arthur Eddington (1882-1944) che decide di tradurlo in inglese. Misteriosamente, questa versione omette proprio il paragrafo in cui Lemaître aveva stabilito la legge di proporzionalità. Nel frattempo, il grande astronomo americano Edwin Hubble ha pubblicato (1929) i risultati sperimentali ottenuti insieme con i suoi collaboratori e ha enunciato una legge generale in base alla quale la velocità di fuga di una galassia è proporzionale alla distanza. Tale legge, identica a quella di Lemaître, con lo stesso fattore di proporzionalità, reca da allora il nome di "legge di Hubble". Essa costituisce la base sperimentale della teoria dell'espansione dell'Universo, di cui i modelli del Big Bang sono frutto.

Per una curiosa ironia della storia, Lemaître resterà vittima di una doppia ingiustizia. Non solo la legge d'espansione non porta il suo nome, quando egli era stato il primo a scoprirla; anche l'invenzione della teoria del Big Bang è generalmente accreditata non a lui, bensì (di nuovo) a Hubble, nonostante che quest'ultimo abbia sempre disconosciuto tale interpretazione delle sue misure!

Hubble credeva, inoltre, che il fattore di proporzionalità tra velocità di fuga e distanza fosse costante nel tempo. Per questo è stato battezzato "costante di Hubble". Lo sviluppo dei modelli cosmologici basati sulla relatività generale, avviato da Fridman e da Lemaître, ha mostrato, invece, che questa "costante" non è tale: essa dipende dal tempo, sicché sarebbe più giusto chiamarla "tasso d'espansione". Certo, più una galassia è lontana, più la sua velocità di fuga apparente è maggiore; ma la relazione tra queste due grandezze è un po' più com-

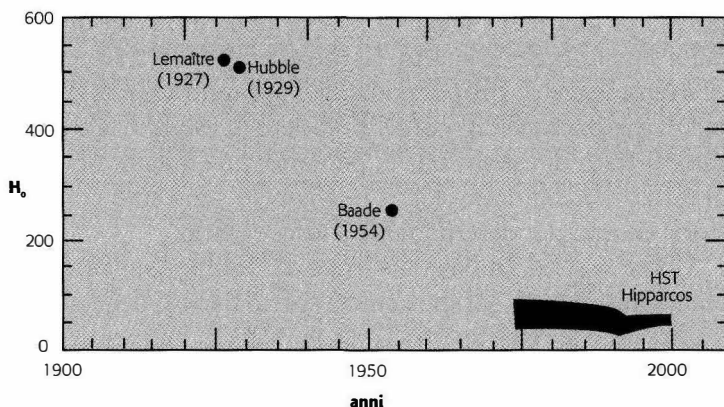
plicata di una mera legge di proporzionalità. Essa dipende dalla curvatura dello spazio. La misura degli scarti rispetto alla stretta legge di proporzionalità è appunto uno degli strumenti sperimentali che consentirebbero di valutare tale curvatura. Il tasso di espansione è, pertanto, una quantità cruciale in tutti i modelli cosmologici in vigore, e sono stati compiuti sforzi enormi per determinarne il valore esatto.

Come lo si fa? In base alla legge di Hubble-Lemaître dobbiamo misurare sia gli spostamenti verso il rosso delle galassie (utilizzando le righe spettrali) sia, in maniera indipendente, le distanze di queste galassie. Nel primo caso, possiamo farlo con grande precisione; nel secondo, invece, ci scontriamo con un problema fondamentale.

[**Distanze astronomiche, p. 259** ▶] A partire dagli anni Venti del Novecento, la costruzione di una scala di distanze extragalattiche affidabile ha rappresentato una sfida immensa per gli astronomi. A lungo si sono affrontati due schieramenti: uno a favore di un basso valore del tasso d'espansione, l'altro di un alto valore – dove questo era il doppio di quello!

In realtà, ogni schieramento valutava le distanze in maniera differente. La situazione è oggi notevolmente migliorata, grazie a una maggiore comprensione degli astri studiati e a nuove tecniche osservative. Le misure recenti tendono ad accordarsi su un valore di 65 km/s per megaparsec (dieci volte inferiore a quello inizialmente stimato da Lemaître e da Hubble[1]), con una precisione solo di qualche punto percentuale.

Una domanda spesso sollevata dal pubblico a proposito dell'espansione dell'Universo riguarda la distanza a partire dalla quale essa agisce effettivamente. Il Sistema solare, per esempio, si ingrandisce sotto l'effetto dell'espansione cosmica? La risposta è no. Il tasso di espansione è impercettibile su distanze così piccole. E l'intera Galassia? No. Al pari di qualsiasi altra singola galassia, essa è troppo legata dalla propria

1. Il fatto che sia diventato 10 volte più piccolo nell'arco di sessant'anni non riflette la sua dipendenza reale in funzione del tempo cosmico, bensì gli enormi errori di misura che compiono gli esseri umani!

32.1 Incertezze sul tasso d'espansione

Questa tabella storica mostra i diversi valori del tasso d'espansione adottati dagli astronomi, dai lavori pionieristici di Lemaître e di Hubble fino ai dati più recenti ottenuti da telescopi in orbita. In sessant'anni di osservazioni il valore è diventato dieci volte più piccolo!

gravità perché le sue stelle possano disperdersi per l'espansione. E le galassie vicine? Di nuovo no! Unite in gruppi o ammassi, le galassie sono sottoposte a velocità di movimento proprio diretto in tutti i sensi. Di fatto, le righe dello spettro della galassia di Andromeda, situata a 2 milioni di anni luce, sono spostate verso il blu e non verso il rosso, e indicano una velocità di avvicinamento di 300 km/s. Non si tratta di un effetto di contrazione del tessuto spaziale tra essa e noi, bensì semplicemente di un movimento di caduta libera, dovuto alla gravità! Alcune altre galassie presentano uno spostamento verso il blu; ma esse appartengono al nostro Gruppo locale, comprendente una ventina di membri mossi da velocità proprie intorno al centro di gravità del gruppo.

La scala di distanza a partire dalla quale agisce l'espansione è direttamente legata al valore del tasso di espansione: 65 km/s per 3 milioni d'anni luce, o 650 km/s per 30 milioni di anni luce, ecc. Nella misura in cui superano questi valori, le velocità di movimento proprio indeboliscono la tendenza all'espansione. In ogni ammasso le galassie hanno velocità di

movimento proprio di qualche centinaia di chilometri per secondo intorno al centro di gravità dell'ammasso. A loro volta gli ammassi possono partecipare a correnti di materia a grande scala, sotto l'influenza gravitazionale di strutture gigantesche come i superammassi e i superattrattori. Anche in questo caso le velocità proprie sono di parecchie centinaia di chilometri per secondo. L'espansione dello spazio, dunque, prevale in modo certo sul movimento locale solo a partire da una distanza di circa 100 milioni di anni luce, ossia per una velocità di fuga che oltrepassa i 2000 km/s. 100 milioni di anni luce è approssimativamente la taglia del nostro Superammasso locale. È soltanto a partire da questo limite che inizia davvero il dominio della cosmologia relativistica.

33

L'ETÀ DELL'UNIVERSO

> Ben presto la sua veneranda età si raccorcerà fino a diminuire di tre quarti.
>
> ALFRED JARRY

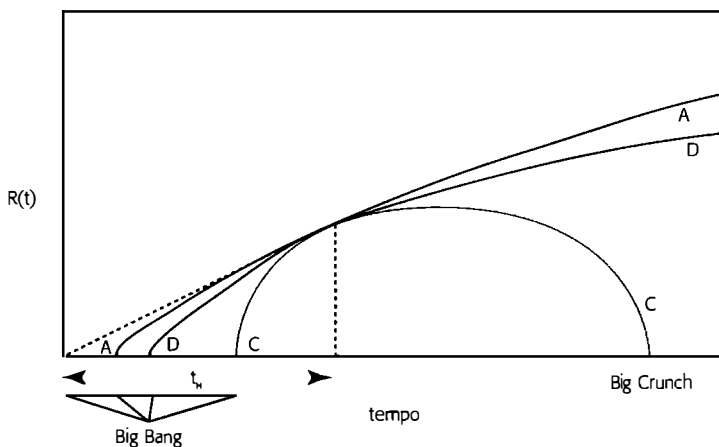
Standando ad alcune ipotesi alquanto semplificanti, il valore del tasso di espansione offre un'indicazione circa l'età dell'Universo. Non è difficile capire perché un tasso d'espansione elevato corrisponda a un'età teorica più giovane dell'Universo: un'espansione di velocità maggiore è cominciata da meno tempo.

L'età teorica dell'Universo ricavata dall'espansione, ossia il tempo impiegato dall'Universo per dilatarsi sino allo stato attuale, supponendo che il tasso di espansione sia costante nel corso del tempo, è chiamata "tempo di Hubble". Nel caso di un universo la cui densità di materia sia esattamente uguale alla densità critica (modello euclideo di Einstein-de Sitter), il tempo di Hubble è dato dalla semplice formula $2/(3H_0)$. Qualora il tasso d'espansione fosse pari a 100 km/s per megaparsec, il tempo di Hubble sarebbe soltanto di 6 miliardi d'anni. Qualora invece il tasso di espansione scendesse a 50 km/s per megaparsec, il tempo di Hubble raggiungerebbe i 12 miliardi di anni.

Dobbiamo ora confrontare il tempo di Hubble con l'età "sperimentale" dell'Universo, l'età cioè degli oggetti più vecchi di cui abbiamo conoscenza – stelle ed elementi chimici. È evidente che tali oggetti non possano avere un'età maggiore di

quella dell'Universo (per definizione). Si tratta, pertanto, di un controllo cruciale per i modelli del Big Bang.

Determinare direttamente l'età di una stella è un po' come calcolare la distanza che un'automobile può percorrere sulla base della quantità di carburante presente nel serbatoio: una volta noti la capacità del serbatoio, il fatto che era pieno in partenza e il consumo della vettura, non è difficile ricavarne il chilometraggio. Nel caso di una stella la capacità del serbatoio è la sua massa; la quantità di carburante rimasta è indicata dal colore e dalla luminosità dell'astro. Resta da conoscerne il consumo, ovvero le reazioni nucleari e il tasso di energia liberata. Tale conoscenza dipende dai dettagli dei modelli di evoluzione stellare.

Nella nostra galassia le stelle più vecchie si trovano nel bulbo centrale e negli ammassi globulari, gruppi compatti di circa un milione di stelle che ruotano intorno al centro della Via

33.1 Tempo di Hubble

Se conosciamo il tasso di espansione attuale, indicato con H, non abbiamo difficoltà a estrapolare il passato cosmico e a determinare l'età dell'universo, ossia il tempo trascorso dall'inizio dell'espansione. Tale tempo è necessariamente inferiore al tempo di Hubble $t_H = 1/H$, ottenuto tracciando la tangente alla curva $R(t)$ nell'istante presente (linea tratteggiata). Nel caso di un universo di densità critica (D) l'età è uguale a $2/3\ t_H$; nel caso di un universo chiuso (C), è inferiore a $2/3\ t_H$, nel caso di un universo aperto (A) è compresa tra $2/3\ t_H$ e t_H.

Lattea. Misurare l'età delle stelle sulla base della luminosità degli ammassi globulari è compito delicato, in quanto un piccolo errore a proposito della luminosità modifica l'età di più del 20%. I risultati hanno pertanto una certa flessibilità. I dati ottenuti dal satellite europeo Hipparcos indicano una forchetta compresa tra 9 e 14 miliardi di anni – cui va aggiunto 1 miliardo di anni circa per ottenere l'età dell'Universo, dal momento che questo è il tempo minimo necessario alle prime stelle per formarsi dopo il Big Bang.

L'Universo contiene elementi radioattivi che si disintegrano in tempi noti poiché misurati in laboratorio. Per esempio, l'uranio 238 è un isotopo radioattivo, la cui vita media è di 6,5 miliardi d'anni e che si trasforma in piombo 206. Più chiaramente: prendiamo un chilogrammo di uranio 238 e aspettiamo 6,5 miliardi d'anni; trascorso questo tempo, la massa di uranio 238 sarà diminuita della metà (gli altri 500 grammi saranno di piombo 206); dopo ancora 6,5 miliardi d'anni resteranno soltanto 250 grammi di uranio 238, e così via. La datazione delle rocce terrestri, di quelle lunari e dei meteoriti è ottenuta con questo metodo. Riteniamo di conoscere la quantità di materiale radioattivo presente all'epoca in cui si sono formate le rocce, nel nascente Sistema solare, così bene che ci basta misurarne la quantità attuale per calcolare il tempo trascorso. I risultati danno 4,566 miliardi d'anni per la nascita del Sole e dei pianeti; 3,9 per la formazione della crosta terrestre.[1]

Nelle stelle lontane la funzione di cronometro per lunghe durate è svolta da altri elementi radioattivi; per esempio, il torio 232 (osservato grazie alla spettroscopia), la cui vita media è di 14 miliardi di anni. Il metodo fornisce un risultato coerente con quello dell'evoluzione stellare: l'età dell'Universo è compresa tra 10 e 15 miliardi di anni.

Tenendo conto del tempo di Hubble ricavato dal modello più semplice (Einstein-de Sitter) del Big Bang, vediamo im-

1. Chi non ha sentito parlare del carbonio 14 che consente di datare, su durate più brevi, i resti di esseri organici?

mediatamente che, se il tasso di espansione è troppo elevato, vi è incompatibilità con l'età sperimentale. È per questa ragione che vi è stato un dibattito così aspro sul valore del tasso d'espansione; ancora di recente vi sono due schieramenti, l'uno a sostegno di un alto valore (100) del tutto incompatibile con l'età delle stelle, l'altro di un basso valore (50) marginalmente compatibile. Stando alle ultime stime basate sullo studio delle supernovae, i due schieramenti si sono accordati intorno a un valore molto vicino ai 65 km/s per megaparsec, che dà un tempo di Hubble di 9,4 miliardi d'anni soltanto.

Sono soprattutto quelli che a pelle non sopportano il modello del Big Bang, oltre ai divulgatori sempre a caccia di scoop, che hanno enfatizzato l'apparente incompatibilità tra l'età teorica e quella sperimentale. I primi hanno avuto buon gioco a proclamare la "morte del Big Bang", e una stampa male informata si è prestata a fare loro da cassa di risonanza – nella convinzione che si vendano più copie sbattendo in prima pagina la fine di una teoria famosa (benché non capita) piuttosto che ammettendo che si tratti di ipotesi semplificanti e incerte dal punto di vista sperimentale.

In questo confronto, però, venivano puramente e semplicemente dimenticati gli altri due parametri cosmologici da cui dipende l'età teorica dell'Universo. Anzitutto, il tempo di Hubble dipende non solo dal tasso di espansione, ma anche dalla densità di materia. Se si suppone che l'Universo sia iperbolico, con una densità di materia cinque volte minore della densità critica, il tempo di Hubble aumenta di 2 miliardi di anni: non vi è dunque incompatibilità con l'età delle stelle.

Inoltre, l'età teorica dell'Universo, ricavata dai modelli generali del Big Bang (soluzioni di Fridman-Lemaître), dipende soprattutto dalla costante cosmologica. Il ragionamento della figura 33.1 è corretto soltanto se l'espansione è continuamente rallentata dalla gravitazione, in altri termini se l'Universo è in decelerazione. Molti astronomi sono stati a lungo di questa idea. Ma negli ultimi anni la situazione è radicalmente cambiata grazie a nuovi dati sperimentali che inclinano per un'ac-

celerazione dell'espansione, ossia per l'esistenza di una costante cosmologica non nulla. [▶ p. 277, La repulsione cosmica]

Per una determinata densità di materia e un determinato tasso d'espansione, l'età dell'Universo è sempre maggiore con costante cosmologica positiva. A dire il vero, il tempo di Hubble non è neppure pertinente al discorso sull'età dell'Universo. Quest'ultimo può essere grande quanto si vuole, se la costante cosmologica è opportunamente scelta. Essa risolve dunque facilmente ogni problema circa l'età. L'unico significato che ha la pretesa incompatibilità tra l'età teorica e quella sperimentale dell'Universo è che deve essere scartato il modello ultrasemplificato di Einstein-de Sitter, con la sua densità critica e la sua costante cosmologica nulla. Ma i modelli generali del Big Bang non si riducono a questo caso estremamente particolare: con una densità di materia inferiore a quella critica e una costante cosmologica positiva, essi superano senza problemi il controllo consistente nel confronto delle età.

Del resto, nulla di nuovo sotto il sole: una situazione analoga si era verificata agli esordi della cosmologia relativistica. Il valore della costante di Hubble H_0, determinato sperimentalmente da Lemaître nel 1927 e da Hubble nel 1929, era, come abbiamo visto, dieci volte maggiore di quello misurato oggi. [▶ p. 259, Distanze astronomiche] L'errore, dovuto a una cattiva valutazione della distanza delle Cefeidi, ha finito per ritardare l'accettazione del concetto di Big Bang. Adottando quel valore così elevato del tasso di espansione, l'età dell'Universo, calcolata nel caso di una costante cosmologica nulla, era inferiore al miliardo d'anni; all'epoca non si era in grado di misurare l'età delle stelle, anche se si cominciava ad avere un'idea dell'età della Terra, grazie alla radioattività naturale, appena scoperta. Ecco una delle ragioni per cui Lemaître, preoccupato come sempre di accordare i dati teorici con quelli sperimentali, non volle mai abbandonare l'idea della costante cosmologica, a differenza di Einstein e della maggior parte dei cosmologi.

34

DISTANZE ASTRONOMICHE

> Misura la sincerità e la pietà nel tuo cuore,
> e conoscerai le distanze nel cielo.
>
> RABBI AKIBA (morto martire nel 132)

Determinare la distanza delle galassie lontane richiede una scala di misura progressiva, dove ciascuna barra della scala influisce su quelle che seguono. Il minimo errore sulla prima induce incertezze enormi ai vertici della scala.

La prima barra corrisponde alla distanza delle stelle vicine, che si ottiene tramite la tecnica di triangolazione nota come "parallasse". Tendiamo un dito davanti ai nostri occhi e guardiamolo alternativamente con l'occhio sinistro e l'occhio destro: il dito sembra spostarsi sullo sfondo. Lo scarto angolare, o parallasse, è funzione dello scarto degli occhi e della distanza del dito. Analogamente, le stelle più vicine sono viste in direzioni differenti quando sono osservate a sei mesi di distanza, da una parte e dall'altra dell'orbita terrestre.[1] La parallasse su una stella situata a un anno luce è identica a quella che sarebbe percepita dai nostri occhi qualora guardassero alternativamente una candela a 3 chilometri. In questo caso, essa è di tre secondi d'arco.[2]

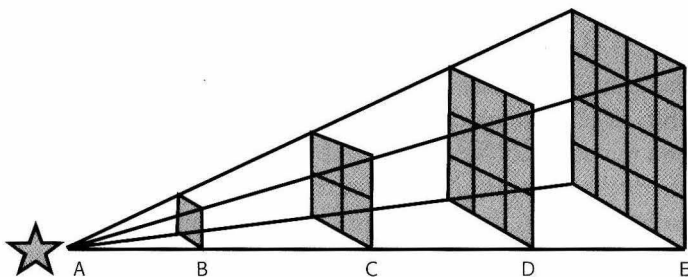
1. Vale a dire con "occhi" separati da 300 milioni di chilometri...
2. Il cerchio è diviso in 360 gradi, ciascun grado in 60 minuti, e ciascun minuto in 60 secondi d'arco. Un secondo d'arco rappresenta dunque la 1.296.000-esima parte della circonferenza di un cerchio.

La prima stella di cui si è misurata la parallasse è 61 Cygni. Nel 1806 l'italiano Giovanni Piazzi (1746-1826) trovò il valore di 0,3″, ossia una distanza di 10 anni luce.

Il metodo della parallasse funziona soltanto per stelle più vicine di 3000 anni luce; al di là, gli strumenti più sofisticati, siano essi al suolo o a bordo di satelliti, non possiedono la risoluzione sufficiente per misurare scarti angolari pari a un millesimo di secondo d'arco.[3] Così è, almeno, nel dominio dell'ottica. Speriamo di riuscire un giorno, tramite osservazioni radio interferometriche, utilizzanti per base la Terra e un satellite artificiale in orbita intorno al Sole, a misurare parallassi trigonometriche fino alla distanza di 300 milioni di anni luce. Con una prima barra di scala così elevata, la misura cosmologica non porrà più problemi.

Non siamo però ancora arrivati a tanto e, nell'attesa, dobbiamo utilizzare altri metodi, basati sulla brillanza degli astri. Una delle proprietà caratteristiche della propagazione della luce nello spazio è che lo splendore apparente di una sorgente luminosa varia in ragione inversa del quadrato della distanza (figura 34.1). Ne discende che la distanza di un oggetto può essere determinata confrontando la sua luminosità apparente con la sua luminosità intrinseca.

La luminosità apparente è quella che misuriamo direttamente. La difficoltà si riduce, dunque, a misurare la luminosità intrinseca di un astro. Come possiamo conoscere lo splendore intrinseco di una lampadina, sapendo che una lampadina A, quattro volte più potente di una lampadina B, avrebbe esattamente lo stesso splendore apparente se fosse situata due volte più lontano? La soluzione consiste nell'impiego di lampadine "standard". Se mai avete comprato delle lampadine al supermercato, saprete certamente distinguere tra una lampadina di 100 watt che osservate da lontano e una da 25 watt piazzata due volte più vicino. Le galassie non si comprano al supermercato,

3. Il progetto Gaia dell'Agenzia spaziale europea prevede di accedere a parallassi di 10 microsecondi d'arco, il che equivale allo spessore di un capello visto a 1000 chilometri di distanza!

34.1 Misure della distanza in base alla luminosità

Alla distanza *B* dal centro luminoso *A*, un certo numero di particelle luminose (fotoni) occupa la superficie *B*. A una distanza doppia, ossia in *C*, i fotoni saranno più sparpagliati in quanto occuperanno quattro superficie simili; a una distanza tripla *D*, saranno tra loro più separati in quanto occuperanno nove superficie simili, e così via.

ma gli astronomi hanno estratto dal cilindro candele standard chiamate Cefeidi, supernovae di tipo Ia e galassie giganti.

Una Cefeide è una stella variabile di tipo particolare (il cui primo esemplare fu scoperto nella costellazione di Cepheus). La variabilità del suo splendore è dovuta a una pulsazione regolare che dilata e contrae alternativamente la stella. Sulla base del periodo di variazione, facile da misurare, gli astronomi sono in grado di determinarne la luminosità propria. Le Cefeidi forniscono un indicatore di distanza, a condizione che la relazione periodo-distanza possa essere calibrata da una Cefeide sufficientemente vicina perché la sua distanza sia stata valutata geometricamente. Grazie a questa calibratura, si è potuto stimare la distanza delle Cefeidi osservate in galassie esterne, così lontane che il metodo della parallasse non avrebbe potuto essere messo in atto. È tramite questa tecnica che Edwin Hubble dichiarerà per la prima volta (1925) la natura extragalattica della nebulosa di Andromeda.[4] Oggi, grazie al telescopio spaziale, è possibile vedere delle Cefeidi persino in galassie distanti 15 milioni di anni luce.

4. Con un errore di calibratura che gli fece pensare che la galassia di Andromeda fosse due volte più vicina di quello che era in realtà – un errore che doveva ripercuotersi sul valore del tasso d'espansione da lui proposto.

Una supernova di tipo Ia (abbreviato in SN Ia) è l'esplosione di una stella, chiamata "nana bianca", che si produce quando la stella supera la massa critica di 1,4 masse solari, per accrescimento in un sistema doppio. Poiché le nane bianche hanno la stessa massa, le loro esplosioni liberano la medesima energia e la medesima luminosità intrinseca. La misura della loro luminosità apparente fornisce così la loro distanza. Di nuovo, si può calibrare la relazione tra la distanza e la luminosità apparente di una SN Ia in una galassia vicina, valutando la distanza di questa galassia grazie alla seconda barra della scala, cioè una Cefeide. Compiuta tale calibratura, le supernovae possono essere osservate ben più lontano delle Cefeidi, poiché la loro luminosità intrinseca è molto maggiore. La nostra scala di misura permette di sondare più a fondo il mondo delle galassie.

Le galassie più brillanti di ciascun ammasso ricco (sono in generale delle ellittiche supergiganti) si suppone che abbiano la stessa luminosità intrinseca. Il 90% di loro possiede uno splendore che varia di meno di un fattore 2. In linea di principio, possono dunque svolgere la funzione di indicatore di distanza, e per regioni ancora più lontane. Più ci si allontana nello spazio, più ci si immerge nel passato; ciascuna galassia ha una storia: in dieci miliardi d'anni, l'evoluzione stellare entro di essa, così come le possibili collisioni con altre galassie, hanno il tempo di modificare le sue caratteristiche. Il metodo delle galassie giganti è altrettanto soggetto a errori sperimentali di quello delle Cefeidi e delle SN Ia, il che è appunto spia della difficoltà di determinare direttamente grandi distanze in astronomia.

35

LA MATEMATICA COSMICA

E sui loro grembiuli sono scritte le formule, in forma astratta, in alta matematica.

FRANCIS PONGE

Quando, nel 1927, Albert Einstein venne a conoscenza del modello d'universo in espansione appena pubblicato dal giovane Lemaître, ebbe a dire: "La sua matematica è superba, ma la sua fisica è abominevole". Oltre alla ripugnanza per una cosmologia non statica – da cui l'ingeneroso giudizio sulla fisica di Lemaître –, la reazione di Einstein rivela come il padre della relatività generale, uno dei maggiori fisici di tutti i tempi, non fosse affatto un matematico di prim'ordine: rimaneva impressionato più dalle capacità matematiche dei colleghi che dai loro ragionamenti fisici!

Nel 1912 il suo compagno di studi Marcel Grossmann, diventato professore di matematica a Zurigo, gli aveva spiegato che, se voleva incorporare la gravitazione nella teoria della relatività ristretta, doveva introdurre una nuova cornice matematica, la geometria differenziale dello spazio curvo. Gli strumenti che consentivano di trattare gli spazi curvi erano stati appena inventati. Escogitati da Bernhard Riemann, erano stati sviluppati da Elwin Christoffel, Gregorio Ricci, Tullio Levi-Civita e alcuni altri, sotto il nome di "calcolo tensoriale". Poiché Einstein non ne ha alcuna esperienza, lascia a Grossmann redigere la parte matematica della relatività generale.

La teoria vede la luce nel 1915. Per alcuni anni, però, fu ignorata – se non addirittura respinta con orrore – da svariati fisici a causa della sua matematica che appariva ostica e incomprensibile. La cosmologia, peculiare dominio d'applicazione della relatività generale, autorizza tuttavia una semplificazione notevole delle equazioni di Einstein e, perciò, del formalismo matematico sottostante. Esaminiamo allora la natura, o piuttosto lo spirito, della "matematica cosmica".

Poiché i testi di divulgazione hanno in genere la consegna di evitare qualunque formula, il grande pubblico tende a ritenere che la fisica, e principalmente l'astronomia, si accontenti di raccontare "storie", se non di proporre immagini e altre analogie. Ciò le conferirebbe una qualche parentela con il mito, cosa che non mancano di sottolineare coloro i quali negano che la cosmologia abbia statuto scientifico. [▶ **p. 225, *Cosmos e logos***]

Al di là dei voli poetici sul Big Bang, il tessuto elastico dello spazio-tempo e l'energia del vuoto, la vera proposta – o, meglio, la folle ambizione – della cosmologia relativistica è quella di ridurre la struttura e il destino dell'Universo a una manciata di equazioni. Credo che la maggior parte dei lettori possa essere sensibile alla bellezza della concisione, quella della famosa relazione $E = mc^2$, ma anche quella delle equazioni della relatività generale. Le riporterò qui di seguito (in forma semplificata), non tanto perché pretenda che siano comprese a fondo, quanto perché desidero che siano *viste*. Penso anche a tutti gli studenti che passano il loro tempo a "scervellarsi" nella risoluzione di equazioni di cui spesso si chiedono a che mai serviranno.

Nella relatività generale gli effetti della gravitazione non vengono interpretati nei termini di una forza generata da corpi dotati di massa, ma si risolvono nella struttura geometrica dell'Universo. L'identificazione tra gravitazione e geometria richiede una cornice matematica nuova: quella di uno spazio-tempo a quattro dimensioni dotato di una metrica non euclidea.

La metrica si può concepire come un modo di misurare la distanza infinitesimale tra due punti vicini. Passo dopo passo,

$$\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} & g_{xt} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} & g_{yt} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} & g_{zt} \\ g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} & g_{tt} \end{pmatrix}$$

35.1 Il tensore metrico

In uno spazio-tempo a quattro dimensioni il tensore metrico possiede sedici componenti che possono essere disposti sotto forma di una tabella (o "matrice") di 4 righe e 4 colonne. Poiché è simmetrica (vale a dire, $g_{xy} = g_{yx}$, ecc.), tale matrice ha in realtà solo 10 coefficienti metrici indipendenti.

consente di valutare l'intervallo tra due punti qualsiasi dello spazio-tempo, ossia tra due eventi, ciascuno dei quali è identificato da tre coordinate di posizione (x, y, z) e una coordinata temporale t. In cosmologia eventi tipici sono l'emissione di una particella di luce da parte di una galassia e la sua ricezione sulla Terra.

La metrica generalizza il teorema di Pitagora che, nella geometria euclidea piana, enuncia che il quadrato della distanza tra due punti è uguale alla somma dei quadrati delle proiezioni della distanza su assi ortogonali di coordinate: $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. In uno spazio-tempo non euclideo, l'espressione pitagorica si trasforma in una somma più complicata che mette in gioco tutti i prodotti a due a due delle coordinate, vale a dire x^2, y^2, z^2, t^2, xy, xz, xt, yz, yt, zt, dove ciascuno di questi dieci prodotti ha un coefficiente che dipende anch'esso dalla posizione e dal tempo. Tali coefficienti g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}, g_{yz}, ecc., chiamati *potenziali metrici*, diventano le variabili essenziali della nuova teoria della gravitazione, poiché definiscono interamente le proprietà di curvatura dello spazio-tempo.

Le equazioni di Einstein rendono dell'accoppiamento tra la geometria dello spazio-tempo e il suo contenuto materiale. Generalizzano l'equazione di Poisson che, nella teoria newtoniana, lega il potenziale gravitazionale (dato da una sola quantità, uno "scalare") alla densità di materia (uno scalare anch'essa). Nella relatività generale la gravitazione è descritta non più da un solo potenziale, bensì dai dieci potenziali metrici.

In maniera assai schematica, le equazioni di Einstein si riducono all'uguaglianza:

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}$$

vale a dire: geometria = materia.

I simboli **G** e **T** sono scritti in neretto per indicare che non si tratta di semplici numeri, bensì di oggetti matematici, chiamati "tensori", una sorta di tabelle di sedici componenti (matrici di quattro righe e quattro colonne, simili alle caselle di una piccola dama) contenenti tutta l'informazione sulla geometria e sulla distribuzione della materia.

Il membro di sinistra, **G**, è costruito a partire da un altro tensore **R** detto di "Ricci", che contiene tutte le informazioni sulla curvatura; la sua espressione è stata trovata da Einstein e da Grossmann dopo numerosi tentativi infruttuosi, grazie a un ragionamento di tipo fisico. Nella prima versione delle equazioni del campo gravitazionale, proposta da Einstein nel 1915, si aveva:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - 1/2\mathbf{g}R$$

dove **g** è il tensore metrico che raccoglie in tabella i potenziali metrici, e R è la curvatura scalare dello spazio-tempo.

Nella seconda versione, offerta nel 1917, Einstein introdusse la costante cosmologica λ, di modo che:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - 1/2\mathbf{g}R + \lambda\mathbf{g}$$

Il membro a destra, rappresentato dal tensore **T**, detto di "impulso-energia", contiene tutta l'informazione sulla distribuzione e il movimento delle differenti forme d'energia nell'Universo, materia e radiazione. Un'eccellente approssima-

zione dello stato attuale dell'Universo è un gas di pressione nulla, le cui molecole, prive di mutua interazione, sono le galassie. Per descrivere in maniera semplice l'Universo primordiale caldo, può essere utile aggiungere una densità di energia e una pressione, sotto forma di radiazione. In entrambi i casi, lo stato della materia è quello di un "fluido perfetto", descritto da due numeri che dipendono in principio dal tempo, la densità $\rho(t)$ e la pressione $p(t)$. Si noti che il termine "supplementare" $\lambda \mathbf{g}$ può essere considerato far parte tanto del membro di sinistra **G** – nel qual caso viene interpretato come un componente della geometria – quanto del membro di destra **T** – nel qual caso viene interpretato come un contributo all'energia (questa è la tendenza oggi predominante). [▶ **p. 277, La repulsione cosmica**]

Le equazioni di Einstein non possono essere risolte in tutta la loro generalità. Per trovarne soluzioni esatte occorre semplificare il membro di sinistra, presupponendo particolari simmetrie spazio-temporali, e semplificare il membro di destra, riducendo il contenuto materiale dell'Universo alla sua espressione più semplice: in base alla regione dell'Universo che si intende descrivere, si può scegliere il vuoto, una massa isolata, un campo elettromagnetico puro, un fluido di galassie, ecc.

L'attenzione alla simmetria e alla semplicità sembra far rivivere l'antica idea platonica, anche se per ragioni meno nobili, dal momento che si tratta soltanto di risolvere un'equazione! Ed è proprio questo che si fa quando si elabora un modello cosmologico che sia soluzione della relatività generale. Per fortuna, nel caso della cosmologia, le semplificazioni sono in gran parte giustificate.[1] Che cosa osserviamo, infatti, a proposito della reale distribuzione della materia nell'Universo a grande scala? Anzitutto, una notevole simmetria intorno a noi, l'isotropia: le proprietà fisiche dell'Uni-

1. Contrariamente alla teoria della cosmologia quantistica, basata su equazioni (dette di Wheeler-de Witt) non risolvibili tanto quanto quelle di Einstein, ma in cui le soluzioni ottenute al prezzo di enormi semplificazioni (si pensi a quelle proposte da Stephen Hawking o da Andrej Linde) sono difficilmente giustificabili.

verso non dipendono dalla direzione in cui le si osserva. Una seconda simmetria fondamentale è più postulata che osservata: si tratta dell'omogeneità spaziale, in base alla quale le proprietà fisiche sono le stesse qualunque sia il punto dello spazio considerato in un determinato istante. Questi due postulati, omogeneità e isotropia, formano insieme il principio cosmologico, che porta a compimento il rifiuto copernicano dell'antropocentrismo.

Sul piano matematico il principio cosmologico si traduce nel fatto che lo spazio è a curvatura costante. La metrica assume, allora, una forma semplice, in cui si evidenzia un fattore di scala universale $a(t)$ che, in ogni istante, ha lo stesso valore nello spazio, sicché la distanza tra due punti qualsiasi varia nel tempo in proporzione ad a. Tale fattore di scala è talora chiamato "raggio d'universo"; il termine, però, non è del tutto corretto, poiché può essere inteso in tal senso solo nel caso di spazi di taglia finita.

Se la curvatura è costante nello spazio, vi sono soltanto tre casi da considerare, a seconda del segno che essa può avere. La curvatura è data dall'espressione $k/a^2(t)$, dove k può assumere i valori +1, 0, −1: se la curvatura è positiva ($k = +1$), lo spazio è sferico e necessariamente finito (come l'ipersfera); se essa è nulla ($k = 0$), lo spazio è euclideo; se essa è negativa ($k = -1$), lo spazio è iperbolico. Gli spazi euclidei e iperbolici possono essere finiti o infiniti; la questione dipende dalla topologia, non dalle equazioni relativistiche.

La soluzione delle equazioni di Einstein che tenga conto delle semplificazioni precedenti e della costante cosmologica fornisce un insieme di modelli detti di Fridman-Lemaître.[2] Un modello di Fridman-Lemaître è caratterizzato dalla sua curvatura, dalla sua dinamica temporale e dalla sua topologia. Solo le prime due sono calcolabili grazie alle equazioni della relati-

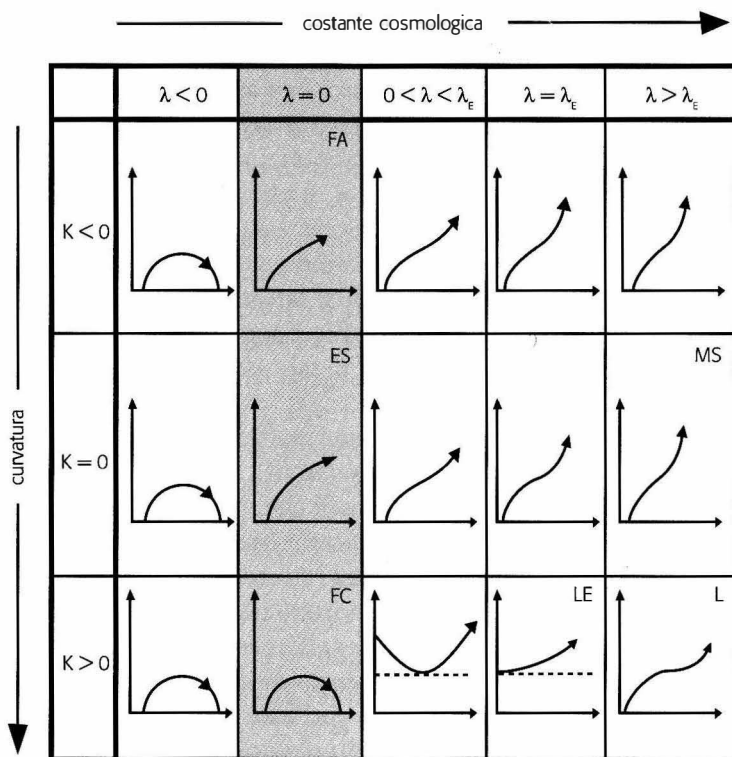
2. A questi gli anglosassoni aggiungono i nomi di H. Robertson e di A. Walker, avendo tali ricercatori chiarito, all'inizio degli anni Trenta del Novecento, la struttura matematica della cosmologia relativistica.

vità. La dinamica è data dal modo in cui il fattore di scala $a(t)$ e la densità $\rho(t)$ variano nel tempo. Quando a aumenta, l'Universo è in espansione, e le distanze tra galassie lontane aumentano nel corso del tempo. In caso contrario, le distanze diminuiscono entro un Universo in contrazione. Alcuni modelli possono presentare fasi successive di espansione e di contrazione nel corso della loro evoluzione. La maggior parte delle soluzioni di Fridman-Lemaître hanno una singolarità iniziale, ossia un tempo t del passato in cui il fattore di scala $a(t)$ si annulla: sono i famosi modelli del Big Bang! Il fattore di scala può annullarsi anche nel futuro: in tal caso l'Universo finisce in un "Big Crunch".

La figura 35.2 ricapitola in forma grafica tutte le evoluzioni temporali possibili del fattore di scala $a(t)$, in funzione dei due parametri cosmologici fondamentali che sono il segno di curvatura e il valore della costante cosmologica. In ottant'anni di storia della cosmologia relativistica i ricercatori hanno privilegiato ora l'uno ora l'altro caso riportato nella tabella. Le campane a morto del Big Bang, che regolarmente la stampa divulgativa pretende di suonare, non fanno che riecheggiare gli slittamenti di consenso che si sono verificati tra i professionisti circa i valori ammessi dei parametri cosmologici; questi non escono, se non raramente, dal quadro generale delle soluzioni omogenee di Fridman-Lemaître, e ciò per una semplice ragione: se ce ne si discosta, è praticamente impossibile trovare soluzioni esatte delle equazione di Einstein!

La maggior parte dei modelli cosmologici relativistici omogenei, proposti dopo il 1917, corrisponde a uno dei casi indicati nella tabella. Per comodità, riporteremo tali modelli in ordine cronologico.

1917. Modello statico di Einstein (caso LE, tratteggiato)

Curvatura: +1
Materia: ρ = costante, $p = 0$
Costante cosmologica: λ_E
Dinamica: no

35.2 Rappresentazione grafica degli universi di Fridman-Lemaître

La dinamica dei modelli cosmologici di Fridman-Lemaître, ossia la variazione del fattore di scala spaziale in funzione del tempo cosmico, è determinata dal segno (k) della curvatura delle sezioni spaziali e dal valore della costante cosmologica λ. Due valori particolari di quest'ultima sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_E$, dove λ_E è il valore indicato da Einstein nel 1917 per assicurare il carattere statico del suo universo ipersferico. Poiché una costante cosmologica positiva equivale a un'azione repulsiva a grande distanza, tutti i modelli che hanno un'elevata costante cosmologica ($\lambda > \lambda_E$) sono "aperti" nel tempo, vale a dire in espansione perpetua, indipendentemente dalla loro curvatura. Al contrario, una costante negativa $\lambda < 0$ (poco verosimile sul piano fisico) contribuirebbe ad aumentare l'effettiva gravità, di modo che i modelli corrispondenti finirebbero tutti per collassare su se stessi.
In alcuni casi ($k > 0$ e $0 < \lambda \leq \lambda_E$) la singolarità iniziale può anche scomparire; non tutte le soluzioni di Fridman-Lemaître sono, dunque, modelli a Big Bang.

È un caso molto particolare di soluzioni di Fridman-Lemaître, poiché la costante cosmologica è assunta precisamente col valore λ_E in modo da rendere il fattore di scala a e la densità di materia ρ costanti nel tempo. L'universo di Einstein è "materia senza movimento".

1922. Modello chiuso di Fridman (caso FC)

Curvatura: +1
Materia: $\rho(t)$ variabile, $p = 0$
Costante cosmologica: 0
Dinamica: espansione-contrazione

Fridman ha trattato sul piano matematico pure le soluzioni a costante cosmologica non nulla, facendo però notare che erano superflue poiché, anche senza di esse, si otteneva un modello matematicamente coerente, dotato di un inizio e di una fine nel tempo.

1924. Modello aperto di Fridman (caso FA)

Curvatura: −1
Materia: $\rho(t)$ variabile, $p = 0$
Costante cosmologica: 0
Dinamica: espansione perpetua

Fridman ha trattato anche le equazioni con costante cosmologica; il suo scopo era di mostrare come la cosmologia relativistica ammettesse spazi di curvatura negativa.

1927. Modello di Lemaître-Eddington (caso LE)

Curvatura: +1
Materia: $\rho(t)$, $p(t)$ variabili
Costante cosmologica: λ_E
Dinamica: espansione perpetua accelerata

La costante cosmologica è assunta in modo che $a(t)$ cresca senza posa a partire dall'ipersfera statica di Einstein a $t = -\infty$. Non vi sono né Big Bang, né problema dell'età dell'Universo.

1931. Modello di universo esitante di Lemaître (caso L)

Curvatura: +1
Materia: $\rho(t)$, $p(t)$ variabili
Costante cosmologica: $\lambda > \lambda_E$
Dinamica: espansione perpetua, inizialmente decelerata, poi accelerata

A partire da una singolarità originaria chiamata "atomo primevo", l'Universo attraversa una fase di "esitazione" nel corso della quale rasenta lo stato statico di Einstein, prima di ripartire in espansione continuamente accelerata. Tale modello risolve il problema dell'età dell'Universo e quello del tempo necessario per formare le galassie.

1932. Modello euclideo di Einstein-de Sitter (caso ES)

Curvatura: 0
Materia: $\rho(t)$ variabile, $p = 0$
Costante cosmologica: 0
Dinamica: espansione perpetua, decelerata

Questa soluzione ultrasemplificata è servita da modello "standard" per sessant'anni, al punto di frenare le ricerche sugli altri modelli. Supportata negli anni Ottanta dal modello dell'inflazione, essa è oggi abbandonata, in particolare perché comporta un'età dell'Universo troppo breve.

Intorno al 1990. Modello a densità sottocritica (FA)

Curvatura: −1
Materia: $\rho(t)$, $p(t)$ variabili
Costante cosmologica: 0
Dinamica: espansione perpetua decelerata

Le misure della densità di materia oscura compiute sulla base della dinamica degli ammassi fanno pensare a una densità largamente inferiore alla densità critica, favorendo così un modello iperbolico.

2000. Modello "provvisoriamente standard" (caso MS)

Curvatura: vicina a 0
Materia: $\rho(t)$, $p(t)$ variabili + energia "oscura"
Costante cosmologica: sì
Dinamica: espansione perpetua accelerata

Si tratta di un ritorno a un modello vicino a quello di Lemaître, imposto dagli ultimi dati sperimentali, ma con una dinamica dominata dall'energia del vuoto, versione attuale della costante cosmologica. La forchetta di incertezza comprende i tre casi di curvatura possibile -1, 0, $+1$; ma molti tra coloro che teorizzano tale modello, restando legati a quello dell'inflazione, aggiustano la costante cosmologica in modo da ottenere un universo esattamente euclideo.

Varianti dei modelli omogenei di Fridman-Lemaître

Continuando sempre a presupporre l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo, è lecito avanzare ipotesi "esotiche" circa la natura e la distribuzione di materia ed energia, che non sarebbero più quelle di un fluido perfetto. Le tre soluzioni sotto riportate hanno suscitato grande attenzione all'epoca in cui sono state proposte; oggi, però, sono (provvisoriamente?) abbandonate.

1917. Modello statico di de Sitter

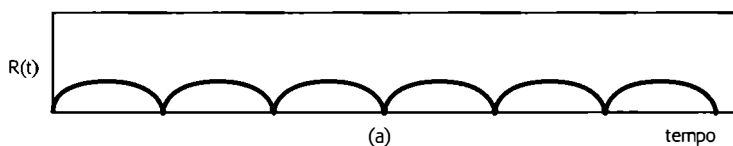
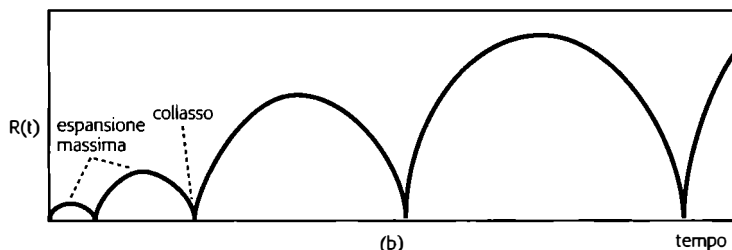
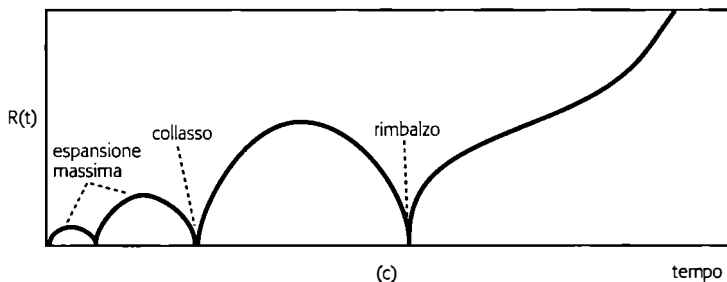
Curvatura: $+1$
Materia: $\rho = 0$, $p = 0$
Costante cosmologica: sì
Dinamica: no

Poiché presuppone che la densità di materia sia nulla, il modello di de Sitter non può rappresentare l'evoluzione completa dell'Universo reale. Ha, però, il vantaggio di mostrare l'effetto della costante cosmologica sull'espansione dello spazio. L'universo di de Sitter è "movimento senza

materia". È stato riutilizzato a sostegno della teoria della creazione continua e, più di recente, per descrivere la fase di inflazione a espansione rapidissima che si ritiene abbia avuto luogo nei primi istanti dell'Universo.

1931. Universo oscillante di Einstein-Tolman

Curvatura: +1
Materia: $\rho(t)$ variabile
Costante cosmologica: sì
Dinamica: ciclo perpetuo di espansioni-contrazioni

Normalmente il modello chiuso di Fridman comincia con un Big Bang e collassa con un Big Crunch; lo stesso Fridman, però, aveva indicato la possibilità di una soluzione cicloidale, in cui l'Universo chiuso si dilata e si contrae un gran numero di volte. Se si accettano certe equazioni di stato "esotiche" della materia, si ottiene effettivamente una soluzione in cui il raggio dello spazio oscilla tra un valore minimo (stato di compressione massima) e un valore massimo (stato di compressione minima). Per Richard Tolman le singolarità dovevano essere sostituite da universi molto piccoli e molti densi, del genere dell'atomo primevo. Eddington replicò che trovava alquanto stupido ripetere all'infinito la stessa cosa. Lemaître, dal canto suo, battezzò questo modello "universo-fenice" e dimostrò che le singolarità erano inevitabili, a meno di non introdurre nella relatività generale correzioni quantistiche aventi l'effetto di "smussare la punta". L'universo-fenice ebbe difensori illustri come George Gamow e John Wheeler. Se risaliamo indietro nel tempo, possiamo ritrovare versioni filosofiche di universo-fenice. Nella cosmologia brahmanica, il *kalpa* (giorno di Brahma) era un periodo cosmico equivalente a circa 4 miliardi di anni, e si concludeva con una distruzione totale e un periodo di non creazione (notte di Brahma), per poi rinascere in una successione infinita di cicli. Speculazioni analoghe erano diffuse nell'Antichità: si pensi al "grande anno" che simbolizzava l'ampio periodo alla fine del quale la storia del mondo doveva ripetersi.

35.3 Tre modelli di universo-fenice

(a) L'Universo periodico immaginato da Fridman ripete indefinitamente lo stesso ciclo di espansione-contrazione.
(b) Nel modello studiato da Lemaître la durata e il raggio massimo di ciascun ciclo aumentano nel tempo.
(c) In questo modello la creazione di entropia da un ciclo all'altro è tale che, dopo un piccolo numero di cicli di espansione-contrazione, l'Universo conosce un ultimo rimbalzo (il nostro Big Bang) ed entra in un'espansione perpetua accelerata; in questa ci troviamo attualmente.

1948. Modello dello stato stazionario

Curvatura: 0
Materia: ρ costante + campo d'energia esotica
Dinamica: espansione

Nel 1948 Thomas Gold e Hermann Bondi vollero applicare il "principio cosmologico perfetto", in base al quale le proprietà fisiche dell'Universo sono costanti non soltanto nello spazio (omogeneità spaziali), ma anche nel tempo (omogeneità temporale). Per compensare l'espansione, che tende a diminuire la densità, bisognava immaginare, però, una creazione continua di materia. Secondo i loro calcoli, per garantire lo stato stazionario bastava che un atomo di idrogeno per litro di spazio fosse creato spontaneamente ogni miliardo d'anni.

Fred Hoyle mostrò che ciò poteva realizzarsi nel quadro del modello di de Sitter, a condizione di introdurre un "campo di creazione" nel tensore impulso-energia. Concepito come una riserva di energia potenziale negativa, che si manifesta quando sono create delle particelle, tale campo agirebbe per tutta una storia cosmica perpetua e non cangiante.

Serio avversario del modello del Big Bang negli anni Cinquanta (il nome "Big Bang" fu appioppato per scherno alla teoria di Lemaître dallo stesso Hoyle), questo modello si scontrerà con la scoperta della radiazione fossile.

L'idea di un campo di creazione è stata ripresa, in forma diversa, nei modelli dell'inflazione; la sua azione si esaurirebbe in un'epoca brevissima e primitiva della storia cosmica.

36

LA REPULSIONE COSMICA

Nulla può essere creato dal nulla.

LUCREZIO

Dal 1927 teoria e osservazione mostrano che l'Universo via via si dilata. La maggior parte degli astronomi ha ritenuto che l'espansione dell'Universo dovesse, per effetto dell'attrazione gravitazionale, rallentare, cioè che il tasso d'espansione dovesse diminuire nel corso del tempo.

Ricerche recenti contraddicono tale tesi semplificatrice, che corrisponde soltanto a casi piuttosto particolari delle soluzioni cosmologiche della relatività generale.

Il primo capitolo di questa storia comincia con la "cantonata" presa nel 1917 da Einstein, il quale, ovviamente, sperava di utilizzare la sua nuova teoria della relatività generale per descrivere la struttura complessiva dell'Universo. La concezione cosmologica allora prevalente sosteneva che l'Universo dovesse essere statico, ossia invariabile nel tempo. Einstein si aspetta che la relatività generale corrobori tale opinione. Con sua grande sorpresa, ciò non accade. Il modello di universo che egli elabora, riempito uniformemente di materia e la cui geometria è quella di un'ipersfera, non possiede un raggio di curvatura costante: la forza inesorabile della gravità, agendo su ognuno dei corpi celesti, tende a destabilizzarlo.

Einstein non trova altro rimedio al dilemma che aggiungere alle sue originarie equazioni un termine *ad hoc*, anche se

matematicamente coerente. Tale aggiunta corrisponde a una sorta di "antigravità", la quale agisce come una forza di repulsione che si fa sentire soltanto alla scala cosmologica. Grazie a questo espediente matematico, il modello einsteiniano rimane permanente e invariabile come l'Universo apparente. Einstein indica il termine in questione con la lettera greca λ e lo chiama "costante cosmologica". Si tratta davvero di una costante, poiché deve conservare esattamente lo stesso valore nello spazio e nel tempo. Formalmente, essa può *a priori* assumere qualsiasi valore; quello scelto da Einstein porta a un Universo statico.

Nello stesso 1917 Willem de Sitter elabora un altro modello relativistico statico d'universo, piuttosto diverso da quello di Einstein. Presuppone, infatti, che la densità di materia resti nulla nel corso del tempo; a contropartita deve fare intervenire una costante cosmologica positiva: in assenza di materia, quindi di gravità, soltanto una costante cosmologica può determinare la curvatura dello spazio.[1] Il ruolo della costante cosmologica assume così nuovo significato: nel modello di de Sitter, le traiettorie seguite dalle "galassie" (di massa nulla, giacché si presuppone l'assenza della materia) si separano rapidamente le une dalle altre nel corso del tempo, come se vi fosse una dilatazione generale dello spazio. Ciò significa che, in assenza di materia, la costante cosmologica rivela un'influenza certa sulla struttura dello spazio. Agli occhi di Einstein, però, la soluzione di de Sitter si riduce a una semplice curiosità matematica, dal momento che l'Universo reale ha massa.

Un primo colpo di scena si verifica nel 1922, quando il matematico russo Aleksandr Fridman studia modelli cosmologici senza alcun pregiudizio circa il carattere statico dell'Universo. Scopre così soluzioni della relatività generale in cui il raggio di curvatura dello spazio varia nel corso del tempo, indipendentemente dal fatto che vi sia o meno costante cosmolo-

1. Se la costante cosmologica e la densità di materia sono entrambe nulle, l'Universo si riduce allo spazio-tempo piatto e statico di Minkowski, impiegato unicamente nella relatività ristretta.

gica. Le soluzioni statiche precedentemente individuate da Einstein e da de Sitter appaiono soltanto casi particolarissimi di soluzioni più generali, che sono dinamiche.

Pochi anni dopo, le osservazioni di Edwin Hubble indicano che le galassie tendono davvero a separarsi irresistibilmente nel corso del tempo. In concomitanza, il fisico teorico britannico Arthur Eddington riesamina il modello di Einstein e scopre che, come una matita appoggiata sulla punta, è instabile: alla minima perturbazione entra in espansione o in contrazione.

Tutti questi nuovi fatti inducono a riconoscere che il modello di Einstein non è un modello d'Universo soddisfacente e a rimettere in discussione la costante cosmologica: non solo essa non assolve davvero alla sua funzione, che era di stabilizzare il raggio dell'Universo, ma sembra, comunque, che tale raggio sia variabile. Perché allora conservare un termine che appare superfluo? Einstein è il primo a fare autocritica; nonostante alcune reticenze,[2] finisce per ammettere la pertinenza fisica delle soluzioni di Fridman, dichiarando che con l'introduzione della costante cosmologica aveva commesso il più grande errore della sua vita... Nel nuovo modello relativistico, proposto nel 1932 insieme a de Sitter – un modello a densità uniforme, euclideo e in espansione perpetua –, il termine è scomparso!

A prima vista, il dibattito sulla costante cosmologica è chiuso. Un fisico, però, non è d'accordo. È Georges Lemaître. Ha iniziato le sue ricerche cosmologiche nel 1924 e ha compreso il ruolo dinamico svolto dalla costante cosmologica nel modello di de Sitter. Nel 1927 ritrova le soluzioni scoperte da Fridman e, per primo, collega l'espansione dello spazio alla fuga apparente delle galassie. [▶ **p. 189, Una breve storia dello spazio**]

Per Lemaître la costante cosmologica resta un ingrediente essenziale della cosmologia relativistica. La sua argomentazione si basa anzitutto su un risultato ottenuto dalla "matematica cosmica": nel 1922 Élie Cartan ha dimostrato che la forma più generale delle equazioni della relatività doveva necessaria-

2. Per una ricostruzione dettagliata della vicenda vedi J.-P. Luminet, *L'Invention du Big Bang*, Le Seuil, Paris 2004.

mente comprendere una costante cosmologica. [▶ **p. 263, La matematica cosmica**] Ciò, però, non basta a convincere Einstein. "Come è naturale che sia, l'autorità prestigiosa di Einstein ha avuto più di un'eco. Ma il cancellare dalle equazioni il termine cosmologico costituisce davvero una soluzione alla difficoltà? Non significa piuttosto seguire la politica dello struzzo?", scrive Lemaître, deluso dall'atteggiamento del padre della relatività, che ha rinnegato "uno dei [suoi] massimi contributi alla Scienza".

E insiste: "Sono portato a fare mia una soluzione dell'equazione di Fridman in cui il raggio dello spazio parta da zero con una velocità infinita, rallenti e passi per l'equilibrio instabile [...], prima di riprendere l'espansione a un ritmo accelerato. È questo periodo di rallentamento che mi pare abbia svolto un ruolo tra i più importanti nella formazione delle galassie e delle stelle. Ed è evidente come esso sia essenzialmente legato alla costante cosmologica".[3]

Gli scambi verbali ed epistolari tra Einstein e Lemaître, dedicati alla costante cosmologica, non mancano di spirito. Durante uno dei loro incontri a Pasadena, in California, i giornalisti che ne riportano le interviste parlano di un *little lamb*, un "piccolo agnello", che accompagnerebbe i due fisici in tutte le loro passeggiate.[4] Più seriamente, Lemaître considera la costante cosmologica una necessità insieme logica e osservativa. Sviluppa un'argomentazione seminale in tre punti:

– La costante cosmologica è necessaria per ottenere una scala temporale d'evoluzione che allontani definitivamente dal limite imposto dalla durata delle ere geologiche. I modelli del Big Bang senza costante cosmologica predicono che l'età teorica dell'Universo, calcolata a partire dal suo tasso d'espansione, sia più breve di quella delle stelle, il che è impossibile. Il termine λ consente di ovviare a tale contraddizione: un Uni-

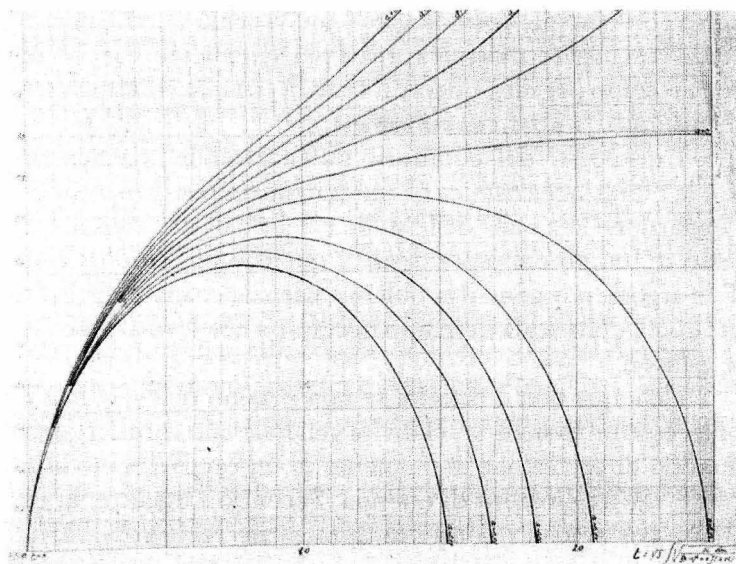
3. Si tratta di un testo pubblicato in seguito nell'articolo "L'Étrangeté de l'univers", in *Revue générale belge*, giugno 1960, pp. 1-14.

4. Il gioco di parole con *lambda* allude a una filastrocca arcinota nelle scuole materne USA, ma ovviamente sconosciuta a Lemaître, che non capirà mai la battuta.

verso con costante cosmologica è più vecchio di un Universo senza costante cosmologica; inizia più lentamente, e gli occorre più tempo per raggiungere il tasso di espansione attualmente misurato. [▶ p. 253, L'età dell'Universo]

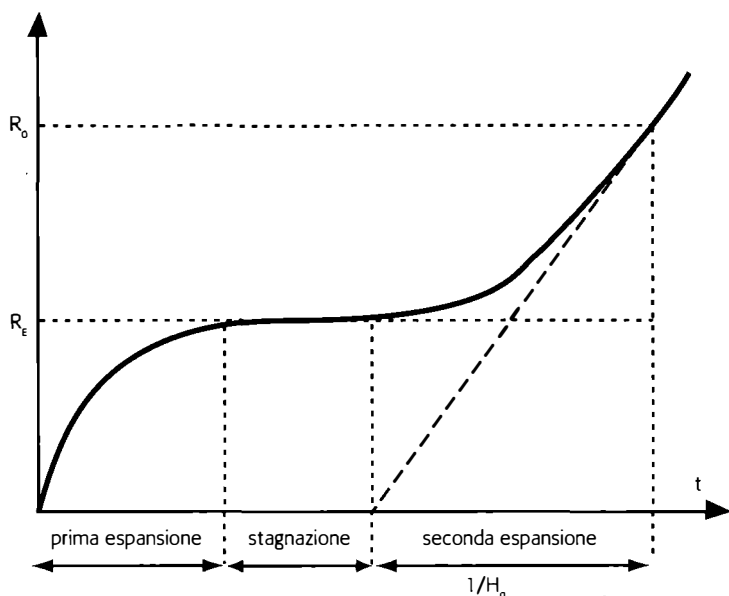
– L'instabilità dell'equilibrio tra l'attrazione gravitazionale e la repulsione cosmica è l'unica maniera per comprendere l'evoluzione alla scala delle stelle e delle galassie, durante un lasso di tempo corrispondente a qualche miliardo di anni. Tale argomento pone il problema essenziale, ancora irrisolto nel 2000, della scala di tempo necessaria alla formazione delle galassie.

– L'energia non è definita se non a meno dell'aggiunta di una costante, poiché la relatività generale non fornisce alcun metodo di correzione al momento di un cambiamento arbitrario del livello zero di energia. Secondo Lemaître, la costante cosmologica consente di fare tale correzione. In tal modo egli intravvede il legame tra costante cosmologica e meccanica quantistica: "La costante cosmologica è superflua per spiegare la gravitazione; ma la gravitazione non è l'intera fisica. Da un punto di vista puramente geometrico, anche il raggio dello spazio di Riemann era una costante di troppo; era un'indicazione che la geometria non poteva bastare a se stessa, ma doveva fondersi in una sintesi più ampia, e precisamente nella teoria geometrica della gravitazione. La costante cosmologica che appare in quest'ultima teoria non potrebbe essere un'indicazione di un'estensione ulteriore, [in] una teoria che verrebbe a unire e sintetizzare il punto di vista della teoria della relatività e quello della meccanica quantistica, in cui pure compare una costante caratteristica, la costante di Planck, la quale non è, forse, priva di rapporto con la costante cosmologica?".

Agli occhi di Lemaître la costante cosmologica pare avere tutte le virtù. Ma egli non riuscirà a convincere né Einstein, né il resto della comunità dei cosmologi. Peraltro, non vi era alcuna osservazione astronomica diretta che sostenesse l'esistenza di questo termine misterioso, e la sconfessione del pa-

36.1 Grafici di Lemaître

Questo straordinario diagramma, disegnato da Lemaître nel 1927, mai pubblicato, traccia le evoluzioni temporali del raggio dell'universo in funzione della costante cosmologica, per uno spazio a curvatura positiva. Tutti i modelli cominciano con una singolarità in ($x = 0, t = 0$). Nel caso di una costante sufficientemente grande, l'universo risulta aperto. I dati più recenti sono compatibili con una soluzione di Lemaître a espansione accelerata (curve in alto).

dre della relatività non poteva non avere il suo peso. La costante cosmologica verrà quasi abbandonata dagli astronomi per mezzo secolo, dal 1940 al 1990.

In questo lasso di tempo alcuni fisici teorici approfondiscono l'idea avanzata da Lemaître nel suo terzo argomento: il legame con la meccanica quantistica. Con lo sviluppo della teoria dei campi quantistici, cominciano a realizzare come la nozione di spazio vuoto sia più sottile di quanto non pensassero. Lo spazio non è un ricettacolo passivo riempito di materia e di radiazione; è un'entità fisica e dinamica, che ha una sua "carne", e questa carne è l'energia del vuoto. Fisici come Paul Dirac e Richard Feynman ipotizzano che quello che noi chiamiamo spazio vuoto sia, in realtà, pieno di "particelle virtuali", le quali si manifestano come realtà materiale soltanto in maniera

36.2 L'Universo esitante di Lemaître

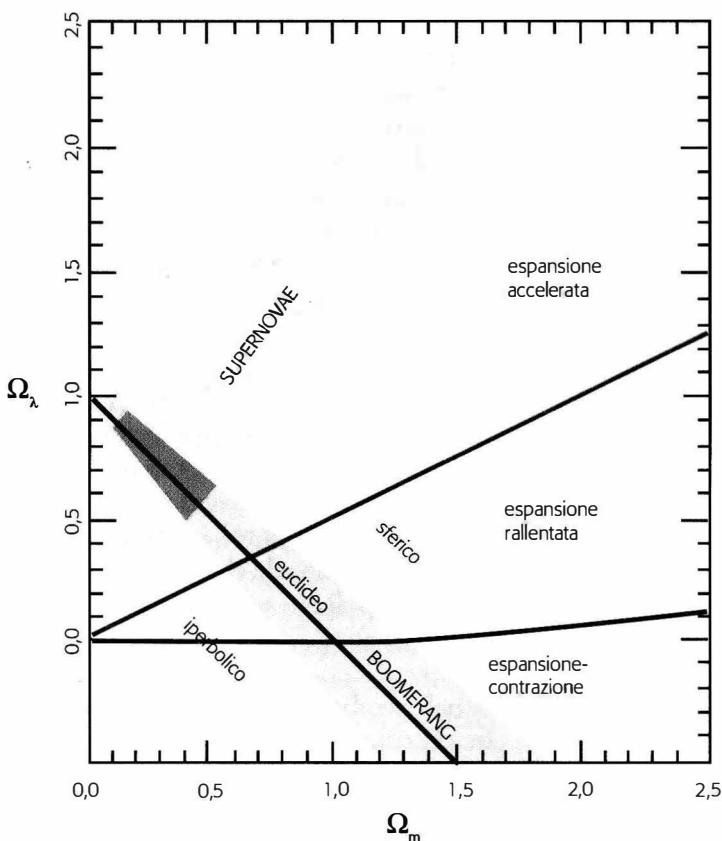
Un modello di universo a espansione accelerata, come quello elaborato da Lemaître a partire dal 1931, consente di risolvere in maniera piuttosto semplice le questioni relative all'età dell'universo e alla formazione delle galassie.

effimera. Prendete un metro cubo di spazio, e levate tutta la materia e tutta la radiazione. Che cosa resta? La maggior parte di noi risponderebbe: nulla. Al contrario, sostengono questi fisici, vi è ancora dell'energia, ed essa conferisce al vuoto una sorta di tensione latente. In altri termini, il vuoto non è il niente; è potenzialmente imbottito d'energia. Questa energia del vuoto non è soltanto implicata dalla meccanica quantistica, ma è mostrata anche nell'effetto Casimir.[5]

5. Nel 1948 Hendrik Casimir aveva predetto che due placche conduttrici parallele e vicine l'una all'altra avrebbero dovuto attirarsi. Si dovette aspettare fino al 1958 per avere un primo controllo sperimentale, e il 1997 per un controllo adeguatamente rigoroso e attendibile. La spiegazione generalmente avanzata è che la sola presenza di placche estrae dell'energia dal vuoto quantistico, sotto forma di elettroni che inducono un campo elettrico attrattivo.

Applicando tale concetto alla cosmologia, l'astrofisico sovietico Yaakov Zel'dovič (1914-1987) dimostra nel 1962 che il termine λ equivale a un campo d'energia latente nello spazio vuoto. La costante cosmologica sarebbe, in un certo senso, la dinamica del vuoto!

Gli astronomi continuano per la maggior parte a ignorare questi sviluppi teorici fino alla metà degli anni Novanta, allorché la costante cosmologica torna improvvisamente sulla scena, e se ne riscoprono immediatamente le virtù a suo tempo dichiarate da Lemaître. Non si pensi, però, che gli astronomi si siano alla fine decisi a leggere i profetici articoli del fisico belga. Più prosaicamente, i nuovi dati osservativi indicano un'accelerazione dell'espansione cosmica. Misurando con una precisione mai raggiunta fino ad allora i resti di quattordici supernovae collocate a distanze che variano tra i 7 e i 10 miliardi di anni luce, gli astronomi scoprono che queste stelle moribonde si trovano dal 10 al 15% più lontane di quanto dovrebbero essere. I calcoli, effettuati grazie ai dati raccolti dal telescopio spaziale Hubble, nonché dai telescopi situati alle Hawaii, in Australia e in Cile, vengono pubblicati nel 1996. Attirano l'attenzione degli scienziati e saranno discussi in numerosi convegni.

La scoperta dà la stura ai soliti annunci a effetto della stampa divulgativa: "Messo in discussione il nostro modello d'Universo", "Tutti i capisaldi della cosmologia potrebbero essere sovvertiti", si legge sui giornali. Persino il *World Economic Forum* di Davos, che riunisce ogni anno i responsabili politici ed economici del pianeta, ha organizzato nel gennaio 2000 un'intera sessione sull'argomento! Invitato al dibattito, ho cercato di far scendere un po' la febbre mediatica, mostrando come l'accelerazione dell'espansione cosmica non implichi necessariamente la messa in questione dei modelli del Big Bang e come essa rappresenti una sorpresa soltanto per quelli che non conoscono a fondo i dettagli del problema. Non è stato facile, di fronte a un'assemblea composta per tre quarti da anglosassoni convinti che la cosmologia contemporanea si riduca al solo nome di Hubble, spiegare che Lemaître, in francese e qua-

36.3 Il quadrato cosmico

Il quadrato cosmico presenta i due parametri cosmologici che determinano la curvatura e la dinamica dell'universo: Ω_m è il contributo della materia alla densità media dell'Universo, Ω_λ è il contributo della costante cosmologica. Ω_m è necessariamente positivo, mentre Ω_λ può essere negativo. La linea nera (segnata da "euclideo") corrisponde a uno spazio a curvatura nulla, e separa gli spazi sferici (curvatura positiva) dagli spazi iperbolici (curvatura negativa). La linea rossa separa gli universi aperti (in espansione perpetua) dagli universi chiusi (in espansione-contrazione). La linea verde separa gli universi il cui tasso d'espansione è accelerato da quelli il cui tasso d'espansione è rallentato. Le zone colorate delimitano i vincoli osservativi attualmente posti dalle osservazioni delle supernovae (in giallo) e della radiazione fossile (in blu). Le due zone si intersecano in una regione (in magenta) che corrisponde chiaramente a un universo in espansione perpetua accelerata, con $0,1 < \Omega_m < 0,4$ e $0,4 < \Omega_\lambda < 0,9$, di cui, però, non si ha alcuna indicazione circa la curvatura.

rant'anni prima, aveva indicato tutti gli annessi e connessi della costante cosmologica!

Le indicazioni sperimentali di un valore non nullo della costante cosmologica provengono non soltanto dalle supernovae di tipo Ia, ma anche da misure indipendenti sulle fluttuazioni della radiazione cosmica di fondo. Ma quale ne è il valore?

La costante cosmologica svolge il ruolo di una densità di energia. Il suo valore può essere quindi espresso nelle stesse unità della densità di materia, per esempio in grammi per centimetro cubo, o, meglio ancora, tramite un fattore Ω_λ, che è assai comodo in quanto consente di stimare immediatamente il contributo della costante cosmologica alla densità totale dell'Universo, Ω_{tot}. I due metodi (supernovae e radiazione di fondo) indicano che Ω_m (*m* sta per materia) è circa 0,3 e che di contro l'Universo è euclideo. Quest'ultimo caso corrisponde a $\Omega_{tot} = 1$. Per arrivare a un Universo "piatto" occorre aggiungere un contributo $\Omega_\lambda = 0,7$, da cui si vede che la misura di λ resta indiretta. Per rendere conto di questa "energia oscura" sono, peraltro, possibili spiegazioni diverse da quella della costante cosmologica.

Nella situazione attuale sembra che si possa giungere a un consenso generale circa l'esistenza di una costante cosmologica, frutto sia di un imperativo logico sia di una necessità osservativa. Resta da chiedersi se il valore ricavato dall'astronomia sia compatibile con quello calcolato dai fisici teorici. E qui le cose si complicano terribilmente, costituendo una delle sfide più importanti per la cosmologia odierna. Vediamo perché.

I fisici che riflettono sul concetto di energia del vuoto hanno in mente un progetto ancor più grandioso: l'unificazione delle interazioni fondamentali. A tal fine sono obbligati a introdurre nelle loro equazioni termini che rappresentino campi naturali del tutto nuovi. Il concetto di campo è stato inventato nel XIX secolo dai matematici per esprimere come una quantità data possa variare da un punto all'altro dello spazio. I fisici hanno subito adottato tale idea per descrivere quantitativamente come forze, quali la gravità e il magnetismo, cambino in funzione dell'allontanamento da una sorgente.

I campi messi in gioco nelle "teorie unificate" sono però diversi da quelli che già conosciamo. Per esempio, il campo di Higgs, oggi al centro di numerose ricerche, è stato introdotto da Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg nella loro teoria elettrodebole che unifica le interazioni elettromagnetiche e nucleari deboli. Grazie al successo sperimentale di questa teoria (le particelle che mediano l'interazione elettrodebole, chiamate bosoni intermedi, sono state effettivamente rilevate al CERN) ci si aspetta che il campo di Higgs non sia un semplice ghiribizzo, tipico del fisico teorico, ma possa prossimamente essere messo in evidenza tramite esperimenti ad altissime energie.[6]

Prima di questa unificazione elettrodebole, l'interazione debole, responsabile della disintegrazione radioattiva di certe particelle, così come l'interazione elettromagnetica, responsabile delle reciproche influenze tra particelle cariche e il movimento di un ago magnetico, erano considerate forze di natura distinta. Combinando le loro descrizioni matematiche in un linguaggio comune, Glashow, Salam e Weinberg hanno mostrato come tale distinzione non fosse affatto fondamentale. Un nuovo campo naturale, il campo di Higgs, fa sì che queste due interazioni agiscano differentemente a bassa temperatura, ossia nell'Universo attuale. Ma a temperature superiori a un miliardo di miliardi di gradi (10^{18}) l'interazione debole e l'interazione elettromagnetica diventano virtualmente identiche nel modo in cui agiscono sulla materia.

Vi è un altro prezzo da pagare per introdurre nuovi campi quantistici: essi conferiscono allo stato di vuoto un'enorme energia latente che si comporta esattamente come la costante λ dei modelli cosmologici. Ecco la costante cosmologica bellamente risuscitata! Non resterebbe che calcolare il valore di

6. Il *Large Electron-Positron* (LEP) del CERN ha di recente potuto spingere i suoi esperimenti a energie più elevate del previsto, e nell'autunno 2000 sarebbero stati rilevati effetti dovuti al campo di Higgs a una massa di 114GeV, equivalente a una temperatura di 1,32 10^{15} K. Il futuro *Large Hadron Collider* (LHC) del CERN, previsto in funzione nel 2005, disporrà delle risorse necessarie per confermare questi indici.

λ nel quadro di queste teorie unificate. La difficoltà è tutta qui. Più modelli sono possibili, ma il valore predetto nella maggior parte dei casi è 10^{122} volte superiore ai limiti prescritti dall'osservazione astronomica![7]

Si tratta di uno scarto talmente grande che la nostra mente ha difficoltà ad afferrarlo. Tuttavia, non ci vuole molto a capire il disappunto dei fisici teorici quando vedono che i loro modelli migliori di unificazione, ritenuti in grado di fare predizioni corrette nel dominio delle particelle elementari, conducono a conseguenze cosmologiche così aberranti.

Gli astronomi hanno senza dubbio ragione; tocca ai fisici comprendere meglio le "teorie unificate", nonché la vera natura dell'energia del vuoto. Nelle cosiddette teorie della "quintessenza" la costante cosmologica è sostituita da un campo variabile nel tempo, assai elevato nelle fasi dell'Universo primordiale, in accordo con i calcoli dei fisici, ma che scende enormemente nel corso dell'evoluzione cosmica, in conformità con il valore attualmente misurato dagli astronomi.[8]

Bisogna davvero spingersi a tanto? Le teorie che predicono un valore elevato della costante cosmologica sono puramente speculative. Nessuno le ha rese oggetto del minimo controllo sperimentale. Il loro approccio potrebbe essere sbagliato. Peggio ancora, i nuovi programmi, che si prefiggono come scopo ultimo di unificare gravità e meccanica quantistica (si pensi alla teoria delle stringhe), hanno come obiettivo secon-

7. La costante cosmologica è assimilabile all'inverso del quadrato di una lunghezza. Per i fisici che si occupano dell'infinitamente piccolo, questa lunghezza va interpretata come la scala di distanza alla quale gli effetti gravitazionali dovuti all'energia del vuoto si manifestano sulla geometria dello spazio-tempo. Essi ritengono che tale scala sia la lunghezza di Planck, vale a dire 10^{-33} centimetri. Per gli astronomi, la costante cosmologica è una forza di repulsione cosmica che agisce sul tasso d'espansione alla scala del raggio dell'universo osservabile, vale a dire 10^{28} centimetri. Il rapporto tra le due lunghezze è 10^{61}, che è la radice quadrata di 10^{122}...

8. Il campo della quintessenza evolverebbe naturalmente verso un "attrattore" che gli conferirebbe un basso valore, indipendentemente dal suo valore d'origine. I fisici ritengono che svariate condizioni iniziali differenti potrebbero portare a un universo siffatto – precisamente quello che è osservato!

dario di predire una costante cosmologica rigorosamente nulla. Se le misure astronomiche vengono confermate, il mistero della costante cosmologica diventerà sempre più fitto, in quanto nessuna teoria è in grado al momento di spiegare perché il suo valore non sia né nullo né grandissimo. Simile a un fantasma, la costante cosmologica ci segnala che nella nostra comprensione dell'Universo manca ancora qualcosa di essenziale; può comunque servire da guida per la messa a punto di una buona "teoria unificata".

È un singolare omaggio al genio di Einstein e di Lemaître vedere come il "piccolo agnello" di cui avevano discusso amabilmente a Pasadena, oltre cinquant'anni fa, abbia seguito un cammino tortuoso la cui meta è ancora lungi dall'essere in vista.

37

LA MATERIA OSCURA

> Vi sono [nell'Universo] astri solitari e altri accompagnati da satelliti, corpi luminosi e masse oscure...
>
> GEORGES-LOUIS-LECLERC BUFFON

Lo spazio è popolato da corpi piuttosto misteriosi. Vi domina una forma di materia, detta "oscura", in quanto inaccessibile all'osservazione dei telescopi. La sua natura è enigmatica. È costituita di astri, composti di materia ordinaria, ma che restano invisibili (piccole stelle, nubi gassose o buchi neri), come dichiarano gli astronomi? Oppure si tratta di particelle esotiche create all'epoca del Big Bang, se non addirittura di campi d'energia ancor più strani, come suggeriscono alcuni fisici teorici?

Oltre alla natura, è decisiva anche la quantità di materia oscura: ne dipendono la curvatura dello spazio e il destino dell'Universo.

La misura dell'invisibile

La dinamica di tutte le strutture astronomiche, dal Sistema solare all'intero universo osservabile, è retta dalla gravitazione. Quest'ultima pone i corpi in movimento; imprimendo loro accelerazioni, influenza quindi le velocità. Misurare le velo-

cità dei corpi celesti visibili significa stimare la massa degli altri corpi, luminosi o no, intorno ai quali quelli gravitano.

Il procedimento è noto. Le leggi di Keplero, riformulate da Newton in base alla teoria dell'attrazione universale, consentono di calcolare la massa dei pianeti a partire dalla loro velocità orbitale. È proprio misurando le anomalie osservate nel moto di pianeti lontani che Joseph Le Verrier e John Adams predicono (1845) l'esistenza, la posizione e la massa di Nettuno. Ed è analizzando i moti irregolari delle stelle Sirio e Procione che Friedrich Bessel predice (1844) che esse devono avere compagne invisibili di massa paragonabile: nel 1862 e nel 1896 vengono effettivamente scoperte le nane bianche Sirio B e Procione B. Analogamente, l'esistenza di buchi neri – astri invisibili per eccellenza! – è inferita dal movimento che essi imprimono alla materia che è loro intorno, gas o stelle. Infine, i "pianeti extrasolari", di cui oggi tanto si parla e che restano per la maggior parte del tempo invisibili, rivelano la loro presenza indirettamente grazie alla leggera danza che imprimono alla stella intorno a cui gravitano.

Queste tre classi di oggetti celesti costituiscono peraltro candidati plausibili per una parte della materia oscura: pianeti giganti gassosi, stelle nane bianche o brune, buchi neri piccoli o grandi.

Dobbiamo all'astrofisico Fritz Zwicky la scoperta di materia invisibile alla scala degli ammassi di galassie. Nel 1933, misurando le velocità delle galassie dell'ammasso Coma Berenices, situato a un centinaio di milioni di anni luce, resta colpito dall'eccessiva rapidità con cui le galassie si spostano entro l'ammasso: la massa visibile di Coma, stimata a partire dalle sue componenti luminose, non basta da sola a spiegare velocità di movimento proprio così elevate. Per spiegare la dinamica di Coma, conclude Zwicky, occorre aggiungere una "massa mancante".[1]

1. Questo se si ammette l'ipotesi che la dinamica newtoniana sia soddisfatta alla scala dell'ammasso. Alcune teorie alternative della gravità modificano la legge newtoniana in maniera da non aver più bisogno di invocare una massa mancante.

Si osserva un fenomeno analogo alla scala di galassie individuali. Nelle galassie spirali le velocità di rotazione delle stelle intorno al centro galattico paiono troppo elevate per essere spiegate dalla sola massa luminosa. Si può allora supporre che queste galassie siano circondate da un alone sferico di materia oscura, di massa dieci volte superiore rispetto alle stelle e al gas brillante nel disco galattico.

Così è cominciata la caccia alla materia oscura. Il termine, però, "massa mancante" è caduto in disuso, perché, in verità, non manca nulla: la materia oscura c'è, e governa l'organizzazione del cosmo!

La sfida cosmologica

Se le galassie tendono a disperdersi in virtù dell'espansione cosmica, la gravità ha l'effetto contrario di raccoglierle. In altre parole, l'attrazione gravitazionale che le masse riunite dell'Universo esercitano le une sulle altre tende a rallentare l'espansione. La competizione è aperta. Vi è materia sufficiente perché un giorno l'espansione si fermi?

Nella relatività generale l'energia in tutte le sue forme detta la curvatura dello spazio. Se la densità media di energia supera una certa soglia critica, lo spazio è di curvatura positiva. In caso contrario, lo spazio è a curvatura negativa; oppure, se la densità raggiunge proprio il limite critico, a curvatura media nulla.

Gli astronomi indicano con Ω il valore della densità reale divisa per la densità critica, di modo che la discussione circa la curvatura dello spazio si risolve nel confrontare Ω a 1. Se Ω è maggiore di 1, lo spazio è sferico e finito; se è minore di 1 o uguale a 1, lo spazio è iperbolico o euclideo (il suo carattere finito o infinito dipende dalla topologia: è l'argomento di *questo libro*!).

Inoltre, se si trascurano le forme particolari di energia che contrastano la gravità, come la costante cosmologica, la curvatura dello spazio detta anche l'evoluzione a lungo termine dell'Universo. Se Ω è maggiore di 1, l'espansione conosciuta at-

tualmente dall'Universo si interromperà in futuro, lasciando il posto a una contrazione generalizzata. In caso contrario, l'espansione andrà rallentando, ma sarà eterna.

La sfida della materia oscura è notevole. La sua quantità totale determina la curvatura dello spazio; la sua distribuzione in materia gravitante ed energia antigravitante governa la dinamica dell'Universo.

Quantità di materia luminosa

Non è molto difficile stimare il numero di stelle luminose in una galassia, e dunque la loro massa totale, misurando la quantità di luce emessa da quella galassia. Calcolare la massa di gas interstellare e intergalattico non è, a sua volta, compito insormontabile. Il gas freddo emette onde radio che possono essere ricevute sulla Terra dai radiotelescopi, mentre il gas caldo emette raggi X. L'atmosfera fa da schermo a questi ultimi; ma essi possono essere rilevati da strumenti a bordo di razzi o satelliti.

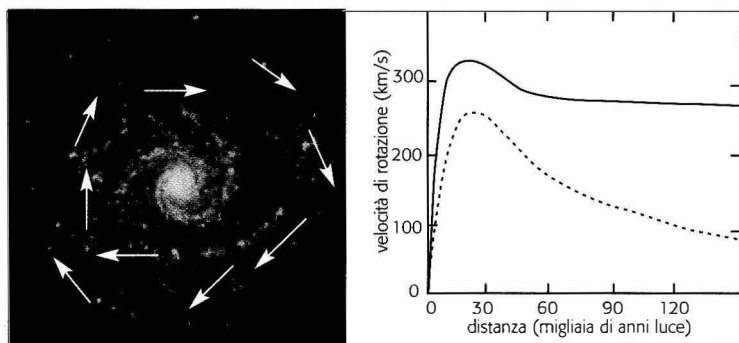
Sommando le masse di tutti i corpi luminosi si ottiene un valore Ω_v (v sta per "visibile") che non supera 0,03 – ampiamente insufficiente per chiudere l'Universo.

La materia oscura aumenta necessariamente questo valore. Fino a quanto?

Quantità di materia oscura nelle galassie e negli ammassi di galassie

In una galassia spirale vediamo stelle, gas e polveri raccolti in un disco sottile, in rotazione intorno a un asse passante per il centro. La maggior parte della materia visibile è concentrata in un grosso rigonfiamento centrale, il bulbo galattico; sul piano della meccanica celeste, la galassia dovrebbe comportarsi come un sistema kepleriano, cioè un corpo massivo centrale circondato da corpi di massa assai piccola la cui velocità di rotazione decresce rapidamente più sono lontani. Si può misu-

rare la velocità di rotazione delle stelle e del gas (più esattamente, la sua componente proiettata nella direzione dell'osservatore) grazie all'effetto Doppler che sposta le righe spettrali verso il rosso (rispettivamente verso il blu) proporzionalmente alla velocità d'allontanamento (rispettivamente di avvicinamento) della sorgente. La curva di rotazione è la traccia di questa velocità in funzione della distanza dal centro (vedi figura 37.1). Si nota che le velocità osservate sono elevate in modo anormale a grande distanza dal centro, diversamente dal caso kepleriano in cui le velocità dipenderebbero soltanto dalla massa visibile. Per spiegare lo scarto tra le due curve, gli astronomi ne ricavano la massa necessaria per conferire alle stelle e al gas un tale movimento. Calcolando ugualmente la curva di rotazione teorica, ottenuta nel caso in cui la galassia contenesse soltanto la sua materia visibile, risulta che la massa oscura è almeno dieci volte maggiore della massa luminosa.

Inoltre, parecchi astronomi ritengono che la materia oscura non possa essere distribuita nel disco, bensì in un alone sferico esteso che ingloba interamente la galassia visibile.

37.1 Curva di rotazione di una galassia spirale

A sinistra, veduta di una galassia spirale. Le frecce rappresentano le velocità di rotazione delle stelle intorno al centro. A destra, la linea continua indica la curva della velocità di rotazione in funzione della distanza dal centro. La curva tratteggiata corrisponde a quella predetta se la galassia contenesse soltanto materia visibile.

Per le galassie ellittiche, che non hanno disco, tali misure sono impossibili; si possono, però, valutare tanto le velocità dei movimenti propri delle stelle quanto la temperatura del gas interno alla galassia. Anche in questo caso, mediante certe modellizzazioni, se ne conclude che le galassie ellittiche devono possedere una massa almeno dieci volte maggiore di quella visibile.

Gli ammassi di galassie sono costituiti da centinaia di galassie raggruppate dalla gravitazione. Tre sono i metodi a disposizione dell'astronomo per valutare la loro massa dinamica.

Le galassie si spostano nell'ammasso sotto l'influsso del campo gravitazionale generale. Una modellizzazione consente di calcolare la massa totale in funzione della velocità dei movimenti propri delle galassie. Queste ultime sono fornite dalle osservazioni spettroscopiche.

Un secondo metodo poggia sull'analisi della distribuzione della temperatura del gas intergalattico estremamente caldo che bagna l'ammasso. Esso è osservato nel dominio dei raggi X grazie a satelliti astronomici quali Rosat e Chandra.

[**Miraggi celesti, p. 39 ▸**] Il terzo metodo si basa sui miraggi gravitazionali. I raggi luminosi sono incurvati dalle masse dei corpi celesti. Si ha un effetto di lente gravitazionale quando un ammasso di galassie – la lente – è situato in primo piano rispetto a una sorgente luminosa molto lontana – una galassia o un quasar. Nel caso di un'opportuna configurazione, l'analisi permette di ricostruire la massa totale dell'ammasso-lente.

I tre metodi convergono allo stesso risultato: la materia oscura contenuta negli ammassi di galassie è *almeno* dieci volte superiore a quella luminosa. Il loro contributo al parametro di densità è dunque $\Omega_d \geq 0,3$ (*d* sta per "dinamica").

Materia oscura e Universo primordiale

Uno dei successi dei modelli del Big Bang è la spiegazione delle abbondanze osservate di elementi chimici leggeri (deu-

terio, elio, litio) in una breve fase di “nucleosintesi” primordiale, che risale ai primi tre minuti dell'Universo.

Per esempio, il deuterio è un isotopo dell'idrogeno che interviene nella fusione di quest'ultimo. Essendo, però, il più fragile di tutti i nuclei, esso viene distrutto dalle reazioni nucleari. Più protoni e neutroni vi sono in un dato volume di spazio, più è grande il numero di reazioni che distruggono il deuterio, e di conseguenza meno abbondante è il deuterio che può formarsi. Dal momento che non vi è stata nuova creazione di deuterio dopo la nucleosintesi primordiale,[2] la sua abbondanza attuale riflette quella passata. Si capisce perché la quantità di deuterio, oggi valutata con l'aiuto della spettroscopia, sia legata alla densità di protoni e di neutroni all'epoca in cui questi si sono formati.

Lo stesso vale per gli altri elementi prodotti nell'Universo primordiale: l'elio-3 (due protoni e un neutrone), l'elio-4 (due protoni e due neutroni), il litio-7 (tre protoni e quattro neutroni). L'attuale misura delle loro proporzioni dà il valore della densità di protoni e di neutroni nell'Universo primordiale. Per la legge di espansione,[3] questo valore indica la densità attuale di protoni e neutroni – quella che contribuisce al parametro Ω. Il calcolo teorico delle abbondanze, effettuato nel quadro dei modelli del Big Bang, è in accordo con le osservazioni se la densità della materia è prossima a 0,06.

Possiamo da ciò concludere che viviamo in un Universo di densità leggermente inferiore a quella critica, cioè a curvatura spaziale negativa e in espansione perpetua? No, poiché il ragionamento sopra riportato si applica soltanto alla cosiddetta materia “barionica”. I barioni formano la classe di particelle composte da quark. I protoni e i neutroni sono i più

2. Il nuovo deuterio formato nelle stelle dalle reazioni nucleari viene subito distrutto da altre reazioni.

3. Per essere più precisi, si assume che la densità resti costante per unità di volume comobile. L'aumento di quest'ultimo nel corso della storia cosmica è pari al cubo del fattore di scala $R(t)$. La densità, dunque, si diluisce assai velocemente nel tempo.

stabili tra loro, ed è per questo che sono i costituenti dei nuclei atomici: i cosiddetti nucleoni. La materia barionica può essere semplicemente qualificata come materia ordinaria;[4] è quella che costituisce le stelle, i pianeti, i sassi, gli esseri viventi, le automobili, ecc.

La materia oscura esotica

Ricapitoliamo la situazione:

– la stima della materia visibile (galassie, gas) fornisce il valore $\Omega_v \approx 0{,}03$;

– le analisi dinamiche delle galassie e degli ammassi di galassie danno $\Omega_d \geq 0{,}3$;

– i calcoli circa la nucleosintesi primordiale impongono $\Omega_b \approx 0{,}06$ (*b* sta per barionica).

La conclusione che si può trarre da questi raffronti è che non solo l'Universo contiene almeno per il 90% materia oscura (poiché $\Omega_d \geq 10\ \Omega_v$), ma che questa materia oscura non è composta unicamente da materia ordinaria (poiché $\Omega_d > \Omega_b$).

Quest'ultimo punto farebbe pensare che esista della materia "straordinaria". I fisici teorici preferiscono chiamarla "esotica". Da dove può venire? Per giustificarne l'esistenza, bisogna aprire il vaso di Pandora della fisica delle particelle...

Alcuni cosmologi ritengono di poter rafforzare la credibilità della materia oscura sostenendo che un Universo che avesse esattamente la densità critica $\Omega = 1$ sarebbe più soddisfacente dal punto di vista estetico. I loro argomenti sono, però, piuttosto discutibili, poiché si basano, da una parte, sull'idea che le equazioni cosmologiche corrispondenti siano più semplici, dall'altra, sulle teorie della fisica delle alte ener-

4. La materia ordinaria (atomi, molecole, Universo primordiale) è costituita non soltanto da protoni e neutroni (barioni), ma anche da elettroni (leptoni), in numero quasi uguale a quello dei protoni (altrimenti, l'Universo non sarebbe elettricamente neutro). Gli elettroni, però, sono estremamente leggeri – 1836 volte più dei protoni – sicché il loro contributo alla massa dell'Universo è del tutto trascurabile.

gie applicate alla descrizione dell'Universo primordiale. A loro dire, l'Universo potrebbe aver conosciuto una fase estremamente breve, chiamata inflazione, nel corso della quale il suo tasso d'espansione sarebbe aumentato in proporzioni considerevoli. [▶ p. 329, L'universo è piatto?]

L'inflazione avrebbe avuto tra le sue conseguenze quella di appiattire irresistibilmente l'Universo (un po' come la superficie di un pallone che, gonfiata a dismisura, tende a diventare piatta); per dirla in altri termini, di portare la densità media dell'Universo al valore $\Omega = 1$.

In tal caso la totalità dell'energia nell'Universo si distribuirebbe in un 1% di materia luminosa e un 99% di materia oscura; ed entro quest'ultima, in un 10% di materia ordinaria e un 90% di materia esotica! Esaminiamo più in dettaglio quali tipi di costituenti possano contribuire all'una o all'altra di queste forme di materia-energia oscura.

Natura della materia oscura

– La materia visibile, ossia la materia ordinaria composta prevalentemente di protoni e di neutroni, è in forma di stelle, di polveri e di gas interstellari.

– La materia oscura barionica, ossia la materia ordinaria troppo poco luminosa per essere osservata, può essere composta da astri invisibili chiamati collettivamente MACHO (buchi neri, pianeti giganti, nane brune) o da gas freddo non emissivo.

– La materia oscura non barionica è costituita da particelle esotiche chiamate collettivamente WIMP; essa si suddivide in due tipi: la materia oscura fredda e la materia oscura calda.

– L'energia oscura non "particellare", se esiste, è necessariamente di natura cosmologica, e probabilmente proviene dal vuoto, dai difetti topologici o dai campi quantistici.

I termini MACHO e WIMP hanno origine da un gioco di parole forgiato dai cosmologi di lingua inglese. A rigor di logica, la

materia oscura barionica è, almeno in parte, costituita da oggetti celesti piuttosto piccoli (una stella grande e luminosa quanto basti), che popolano gli aloni delle galassie. Li si chiama dunque MACHO, acronimo di *Massive Astrophysical Compact Halo Objects*. La materia oscura non barionica può essere composta da particelle elementari dotate di masse, che sono state prodotte a elevatissima energia nei primi istanti del Big Bang e che interagiscono più o meno con la materia nota (da qui la difficoltà di rilevarle). Le si chiama *Weakly Interacting Massive Particles*, il cui acronimo WIMP significa letteralmente "imbranato". Gli astronomi hanno riassunto il problema della materia oscura in una battuta di dubbio gusto: l'Universo è dominato da veri macho o da imbranati?

Più seriamente, esaminiamo quali sono gli esperimenti che consentono di rilevare MACHO e WIMP.

La scoperta dei MACHO

La materia barionica visibile, che può essere rilevata direttamente dagli astronomi, è quella che emette quantità sostanziali di radiazioni (stelle e nubi gassose) o che assorbe radiazioni (polveri interstellari e nubi fredde). È evidente che molti dei corpi nell'Universo non entrano in queste categorie.

I corpi compatti, dotati di massa e invisibili sono sia *buchi neri*, prototipi della materia oscura, sia astri troppo piccoli per innescare reazioni nucleari e brillare da se stessi, vale a dire *stelle nane* e *pianeti giganti*.

Benché la natura e l'esistenza dei buchi neri sollevino questioni affascinanti, è poco probabile che essi siano in grado di apportare un contributo significativo alla massa nascosta. Sappiamo, infatti, che i buchi neri di massa stellare possono essere prodotti soltanto dalle stelle più massive, le quali sono molto rare. D'altra parte, i buchi neri giganti, che sembrano essere presenti al centro di alcune galassie, non possono esistere in gran numero negli aloni delle galassie spirali; altrimenti imprimerebbero alle stelle del disco velocità di movi-

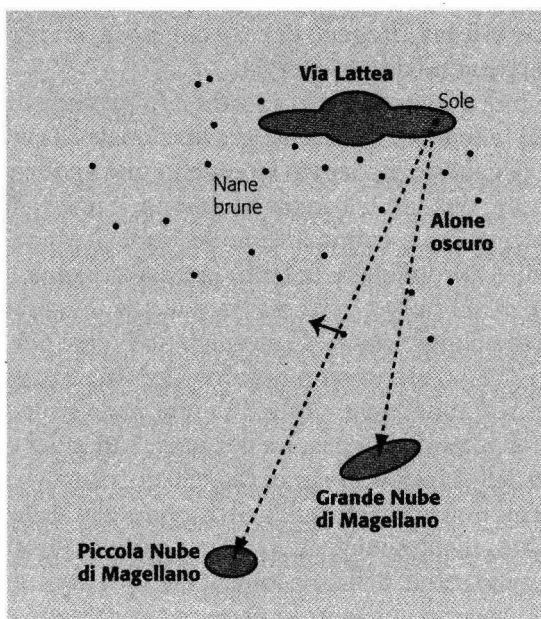
mento proprio troppo elevate rispetto a quelle osservate. Infine, i piccoli buchi neri formati nell'Universo primordiale restano alquanto ipotetici. In totale, la densità di massa contenuta in ogni tipo di buco nero è certamente trascurabile.

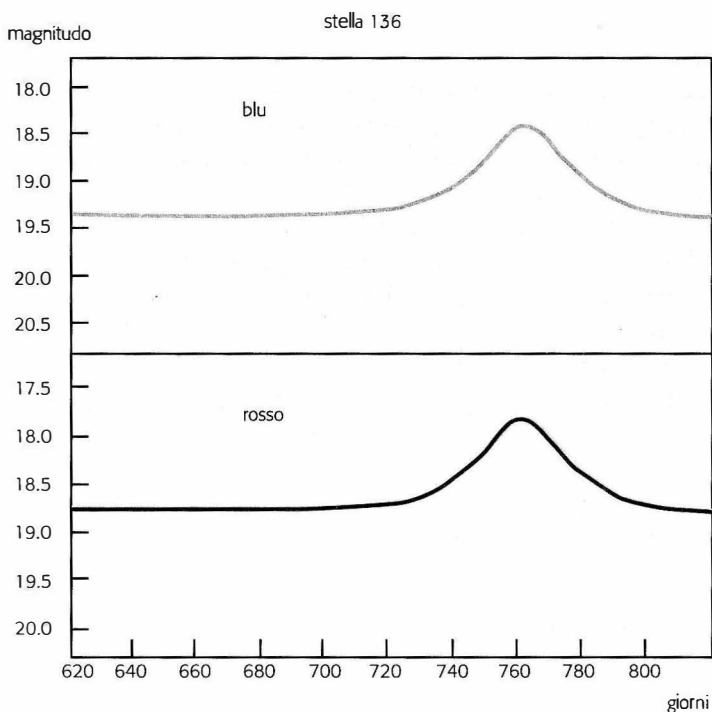
L'idrogeno e l'elio sono i due elementi chimici più abbondanti nell'Universo. Le stelle ne sono costituite per il 99%. Tuttavia, gli astri di idrogeno e di elio, la cui massa è inferiore all'8% della massa solare, non diventeranno mai così caldi da innescare reazioni nucleari, né brilleranno mai come stelle. Queste stelle "abortite" sono dette *nane brune*. Sappiamo che esistono. Ne conosciamo almeno una, che si trova nel nostro Sistema solare: Giove. Possiamo, infatti, considerare questo astro una nana bruna più che un pianeta, dal momento che, nonostante la sua massa sia un millesimo di quella del Sole, Giove irraggia nell'infrarosso: ad alta pressione, ma a bassa temperatura, il gas idrogeno di cui è composto si cristallizza al centro del pianeta e libera energia.

Come individuare le stelle abortite? In precedenza, ho accennato al fenomeno della lente gravitazionale alla scala degli ammassi di galassie. Lo stesso fenomeno può verificarsi a una scala minore, quando la sorgente luminosa è una stella di una galassia vicina, per esempio la Grande Nube di Magellano o la galassia di Andromeda, e la lente una nana bruna collocata nell'alone o nel bulbo della nostra galassia. Siamo allora in presenza di una *microlente*. Come ha fatto notare per la prima volta, nel 1986, l'astronomo polacco Bohdan Paczinsky, nel corso del suo movimento galattico una nana bruna ha una probabilità non nulla di passare per un istante sulla visuale di una stella della Grande Nube di Magellano, situata sullo sfondo. I calcoli mostrano che all'incirca una stella della Grande Nube di Magellano su due milioni deve subire a un istante dato un'amplificazione della sua luminosità superiore al 30%.

Le cose si complicano, se si tiene conto del fatto che, tra i milioni di stelle della Grande Nube di Magellano, parecchie decine di migliaia sono intrinsecamente variabili. Come distinguere tra una variabilità intrinseca e una variabilità occasionale, dovuta a un effetto di microlente? Quest'ultima presenta tre

caratteristiche proprie che ne facilitano l'identificazione. In primo luogo, l'evento, poiché è assai raro, deve essere non ripetibile per una data stella; inoltre, la curva di luce deve essere acromatica, ossia indipendente dalla lunghezza d'onda d'osservazione; infine, la forma del picco di luce deve essere simmetrica nel tempo e avere una durata di circa 30 giorni (quest'ultima cifra è ottenuta considerando una nana bruna, la cui massa è un decimo di quella del Sole, collocata a 30.000 anni luce e avente una velocità trasversale di 160 km/s).

Una volta definito il programma delle osservazioni, resta la realizzazione pratica, che implica miliardi di misure di luminosità stellari per parecchi anni. Infatti, se l'alone della galassia è popolato da diecimila miliardi di nane brune (cento volte

37.2 La ricerca di microlenti gravitazionali

La Grande e la Piccola Nube di Magellano sono due galassie satelliti della nostra Via Lattea; le loro stelle servono da fondale per rilevare, grazie a effetti di microlente, le nane brune dell'alone.

37.3 Curva di luce di un micromiraggio gravitazionale

Il diagramma rappresenta la curva di luce della stella 136 della Grande Nube di Magellano. Sull'ascissa, il tempo di osservazione misurato in giorni; sull'ordinata, la magnitudo apparente della stella. In alto, l'osservazione è compiuta nel colore blu, in basso nel colore rosso. Non si manifesta alcuna differenza. Il picco di luminosità è simmetrico, e la durata dell'evento è di una trentina di giorni, in conformità con un effetto di microlente.

più delle stelle luminose) che possono svolgere il ruolo di microlenti, solo lo splendore di una manciata di stelle tra i dieci milioni racchiusi nella Grande Nube di Magellano potrebbe variare in maniera riconoscibile.

Nel 1990 tre programmi battezzati EROS (acronimo dal francese *Expérience de Recherche d'Objets Sombres*), MACHO e OGLE (acronimo di *Optical Gravitational Lensing Experiment*) hanno realizzato esperimenti ambiziosi consistenti nell'esame di milioni di stelle nelle direzioni della Grande e Piccola Nube

di Magellano (EROS e MACHO) e della galassia di Andromeda (OGLE), al fine di rintracciare eventuali microlenti situate nell'alone o nel bulbo della nostra galassia.

I primi "eventi" sono stati rilevati nel settembre 1993. Ormai sono catalogati quasi giornalmente, seguiti ventiquattro ore su ventiquattro nei vari siti distribuiti in Cile, in Africa del Sud e in Australia, ossia in quelle regioni del globo da cui si vedono bene sia il centro della Galassia sia le Nubi di Magellano. Fotografie scattate all'Osservatorio Australe Europeo in Cile (nel quadro del progetto EROS) e in Australia (MACHO) offrono istantanee delle intere Nubi di Magellano. Grazie a un'accurata sorveglianza, quaranta scatti a notte per parecchi anni, siamo in grado di ricostruire a poco a poco le curve di luce di ciascuna stella delle Nubi di Magellano. Lo stesso vale per il programma OGLE e le stelle della galassia di Andromeda.

È sempre interessante quando gli esperimenti danno risultati diversi da quelli per i quali erano stati concepiti. Ciò è accaduto nel caso dei programmi di osservazione di microlenti. Nel 1998 l'analisi combinata dei risultati ha consentito, in primo luogo, di escludere che nane di massa inferiore a un millesimo della massa solare contribuiscano per più del 10% alla massa della Galassia. In secondo luogo, gli eventi rilevati in direzione della Grande Nube di Magellano sono compatibili con una piccola popolazione di MACHO galattici di mezza massa solare; non sono nane brune, ma stelle nane "normali". La spiegazione della materia oscura va cercata altrove.

La scoperta dell'idrogeno freddo

Abbiamo parlato di stelle abortite. Possiamo immaginare delle galassie abortite? Sì, sotto forma di immense nubi di idrogeno molecolare freddo,[5] che non ha mai potuto conden-

5. Allorché l'idrogeno atomico è scaldato, per esempio dalla radiazione stellare, perde il suo elettrone e si ionizza. Quando è sufficientemente freddo, si associa invece in molecole H_2, costituite da due atomi di idrogeno che hanno messo in comune i loro elettroni.

sarsi in stelle. Sono seri candidati per la materia oscura barionica. Tuttavia, dati assai recenti (2000), provenienti dal satellite ultravioletto FUSE (*Far Ultraviolet Spectrographic Explorer*), fanno piuttosto pensare che l'idrogeno cosmico sia essenzialmente ad alta temperatura, vicina al milione di gradi.

Gli spettri forniti da FUSE hanno individuato nelle nubi di idrogeno uno ione particolare, l'ossigeno-6. Questo atomo altamente ionizzato ha la peculiarità di essere formato a una temperatura minima di qualche centinaia di migliaia di gradi. Ciò significa che le vaste nubi di idrogeno gassoso che lo contengono sono molto più calde del previsto. In passato vi sono stati scienziati che hanno ritenuto che l'idrogeno molecolare freddo potesse spiegare la materia oscura barionica. I dati di FUSE confutano simile ipotesi.

Quanto all'idrogeno caldo, essendo rilevato nell'ultravioletto, rientra ormai nella categoria della materia visibile!

La scoperta delle WIMP

Visto che i MACHO non sono affidabili, occupiamoci degli imbranati. La supposta esistenza di queste particelle esotiche risulta da diverse "teorie unificate" delle interazioni fondamentali (elettromagnetismo, interazioni nucleari forti e deboli, gravità). Poiché l'unificazione può realizzarsi solo ad alta energia, queste particelle ipotetiche hanno potuto formarsi soltanto all'epoca del Big Bang. Può essere che miliardi di esse attraversino i nostri corpi ogni secondo. Essendo WIMP, non interagiscono però con la materia barionica di cui siamo fatti, sicché non possiamo sentire gli effetti della loro esistenza.

Le particelle candidate a formare la materia oscura non barionica avrebbero potuto essere battezzate da Tristan Tzara o da qualche altro poeta surrealista: assione, maiorone, higgsino, fotino, sneutrino, parafotone, gravitino, assino, vortone, neutralino, cosmione, flatino, magnino, gluino, wino, bino, dino, preone, pyrgone, maximone, e così via. Manca solo casino!

Queste particelle vengono classificate in due categorie: calde e fredde.

Il termine "caldo" non si riferisce propriamente a una temperatura, bensì al fatto che queste particelle sarebbero emerse dal Big Bang con velocità vicine a quella della luce. Esiste almeno una particella di questo tipo debitamente classificata: il neutrino. Sappiamo che ve ne sono in media 400 per centimetro cubo (quanto i fotoni, le particelle della luce). Basta che i neutrini abbiano una massa pari a 10^{-32} grammi (cento milioni di volte meno della massa del protone) perché l'Universo raggiunga la densità critica. Ma i neutrini hanno una massa, o non sono, invece, come il fotone, di massa rigorosamente nulla? L'argomento è dibattuto, poiché le teorie ammettono entrambe le possibilità. L'ultima parola spetta, come sempre, agli esperimenti. Stando ai più recenti, effettuati nel 1998 a Superkamiokande (Giappone), i neutrini avrebbero una massa, che non supererebbe però i 10^{-35} grammi. Il loro contributo alla densità d'energia totale dell'Universo sarebbe del tutto trascurabile, rappresentando al massimo soltanto un millesimo della densità critica.

Possono, tuttavia, esistere altre WIMP, calde e dotate di masse, che non sono neutrini. Un vincolo sul loro numero viene dal problema della formazione delle galassie. Le particelle a grande velocità rallenterebbero il processo di formazione delle galassie, poiché hanno la tendenza a frammentare i vasti agglomerati di materia. I calcoli indicano che, se le WIMP calde dominassero la materia oscura, gli oggetti della taglia degli ammassi di galassie sarebbero i primi a formarsi nella storia dell'Universo, frammentandosi poi in masse più piccole. Ciò è, però, in conflitto con le ultime osservazioni che indicano piuttosto che le galassie hanno dovuto formarsi relativamente presto, meno di 1 miliardo d'anni dopo il Big Bang.

Le WIMP fredde sarebbero quelle emerse dal Big Bang a velocità notevolmente inferiori a quella della luce. Tali particelle si sarebbero aggregate in masse galattiche più velocemente della materia calda, sicché le galassie si sarebbero for-

mate prima degli ammassi. Rispetto agli scenari di formazione delle galassie, l'ipotesi della materia oscura fredda è dunque apparsa a lungo la più plausibile. Per quanto numerose "teorie unificate" dicano che esse potrebbero esistere, nessuna particella di questo tipo è stata però scoperta. Peraltro, dati più precisi sulla distribuzione delle grandi strutture dell'Universo contrastano con l'ipotesi di una materia oscura spiegata esclusivamente mediante WIMP fredde. Una miscela di diverse forme di materia oscura sembra funzionare meglio.

Per provare l'esistenza di WIMP l'ideale sarebbe costruire acceleratori di particelle sufficientemente potenti da generare queste particelle ad altissima energia. Tuttavia, la corsa al gigantismo degli acceleratori tocca oggi i suoi limiti, sicché tale metodo non sembra poter essere preso in considerazione, almeno in un futuro prossimo. Ci resta l'Universo, che *è stato*, nel suo lontano passato, uno straordinario acceleratore di particelle naturale, capace di produrre tutte le specie di particelle possibili, di qualunque massa siano.

I cacciatori di WIMP si sono dunque rivolti all'osservazione cosmologica nella speranza di scovare la loro selvaggina, sotto forma di particelle fossili dei primi istanti dell'Universo. La difficoltà principale sta nel costruire rilevatori in grado di afferrare le WIMP cosmologiche. Sono all'opera vari progetti sperimentali. Si basano su "bolometri composti a bersaglio massivo accoppiato a un sensore di temperatura". Per essere chiari, un bolometro è un termometro a resistenza elettrica che serve per misurare deboli emissioni di calore. Quando una WIMP incontra un nucleo del bersaglio, la sua energia si trasforma in calore. Il sensore, sensibile al riscaldamento del bersaglio, converte questo calore in segnale elettrico. Per essere efficace, il tutto deve funzionare a temperatura estremamente bassa, inferiore a 0,1 K (–273 °C). Le prime campagne di rilevamento hanno preso il via; rilevatori sono stati installati nei laboratori sotterranei di Modane, per essere isolati dal rumore di fondo provocato dalla radiazione cosmica. Indipendentemente dai risultati futuri – positivi o

negativi – di questi esperimenti, i rilevatori originali, concepiti per l'occasione, faranno avanzare le ricerche in altre discipline.

La scoperta dell'energia oscura

E se l'essenziale della materia oscura non fosse materia? Se si trovasse sotto forma di un'energia latente non particellare? Una costante cosmologica, e più in generale l'energia del vuoto, simulano idealmente la presenza di materia oscura. Ma questa energia oscura ha una specificità rispetto alla materia. Per quanto concerne la curvatura dello spazio, gli effetti dell'energia oscura sarebbero identici a quelli di una quantità equivalente di materia in virtù della relazione $E = mc^2$. Per esempio, se l'Universo avesse una densità di materia totale (che include le forme visibile, barionica e non barionica) di $\Omega_m = 0{,}3$ e una costante cosmologica corrispondente a una densità di energia $\Omega_\lambda = 0{,}7$, sarebbe a curvatura nulla, vale a dire euclideo. Di contro, per la dinamica cosmica, gli effetti dell'energia oscura sarebbero del tutto differenti: agendo in maniera ripulsiva, come una sorta di antigravità, la costante cosmologica provocherebbe un'accelerazione dell'espansione cosmica. La costante cosmologica conferisce una densità di energia allo spazio esercitandovi, non una pressione compressiva, ma una tensione espansiva che equivale a una pressione negativa.

Al pari delle altre forme di materia oscura, l'energia oscura può ugualmente svolgere un ruolo specifico nel processo di formazione delle grandi strutture. Gli astronomi hanno scoperto nel 1989 un enorme raggruppamento di galassie chiamato "Grande Muraglia", che misura circa 500 milioni di anni luce di lunghezza, 200 milioni di anni luce di larghezza e 15 milioni di anni luce di spessore (figura 9.1). La gravità, da sola, non pare sufficiente per formare una concentrazione di densità così enorme in un tempo così breve come quello impartito dal tempo di Hubble. Come aveva previsto Lemaître, la costante cosmologica aiuta a risolvere questo problema, favo-

rendo, nel corso di alcune fasi passate, la coalescenza di larghi aggregati di materia.

[**L'età dell'Universo, p. 253 ►**] Si vede come, in mancanza di osservazioni dirette sulla natura della materia oscura, i vincoli imposti dalla formazione delle galassie possano guidare la scelta dei cosmologi. La costruzione di una galassia assomiglia a una delicata ricetta di cucina. Perché riesca, occorre saper selezionare gli ingredienti, amalgamarli nelle giuste proporzioni e nell'ordine opportuno, e impostare un tempo di cottura adeguato. Per fortuna, si tratta ancora di cucina rapida: una grossa dose (70%) di energia del vuoto, una buona porzione (25%) di materia oscura non barionica, un'ombra (5%) di materia oscura ordinaria e una fettina (1%) di materia visibile. Un tempo si pensava che la natura avesse orrore del vuoto. Oggi, se si crede a questa ricetta, si dovrebbe ammettere che il mondo fisico non è pieno fino all'orlo: la pasta del vuoto dominerebbe totalmente l'energia universale, incoronata qua e là da una mousse in cui l'intera realtà materiale del mondo si sarebbe rifugiata.

Ci manca forse un *Artusi* cosmico che ci indichi come preparare un soufflé galattico degno di parecchie stelle.

38
LA RADIAZIONE FOSSILE

> Il calore! si direbbe una cosa da niente nello spazio. Sì, del calore a 270 gradi sotto zero.
>
> LOUIS-AUGUSTE BLANQUI

La scoperta della radiazione di corpo nero

Se entrate in una stanza con un camino acceso potete imparare parecchie cose dalla sola osservazione della brace: se è rosso vivo, le fiamme sono spente da poco; se è arancione, il fuoco ha smesso di bruciare da mezz'ora; se è grigia o se non dà più luce visibile, ma potete sentire sulla vostra mano la sua radiazione, il fuoco è ancora più vecchio, anche se non del tutto estinto. In questa progressione, la brace emette una radiazione che va dalla luce visibile all'infrarosso, cioè la cui lunghezza d'onda diventa sempre più grande, o l'energia sempre più debole, col passare del tempo.

I primi stadi del Big Bang possono essere pensati come una sorta di grande fuoco di cui l'Universo stesso sarebbe la brace. Via via che si è dilatato, l'Universo si è raffreddato, e ha prodotto una radiazione la cui lunghezza d'onda è sempre più spostata verso il rosso. Oggi, quattordici miliardi di anni dopo il fuoco cosmico, la sua radiazione si trova nella gamma delle microonde, quelle che sono utilizzate dagli omonimi forni che usiamo per riscaldare rapidamente il cibo. Vi sono, però, differenze essenziali tra il Big Bang e il fuoco del camino: da un

lato, noi non guardiamo dall'esterno la brace cosmica, ma ne facciamo parte mentre si sta raffreddando; dall'altro, non vi è alcun camino!

Questo tipo di ragionamento è stato fatto per la prima volta da Georges Lemaître nel 1931. Quale punto di partenza dell'espansione cosmica egli immagina l'"atomo primevo", un nucleo gigante ultradenso, paragonabile ai nuclei atomici ordinari ma molto più grande, la cui instabilità generale avrebbe prodotto l'espansione. "L'atomo universo si è frantumato in frammenti, ciascun frammento in parti più piccole. [...] L'evoluzione del mondo può essere paragonata a un fuoco d'artificio appena finito. Qualche miccia rossa, cinerea e affumicata. In piedi su un bruscolo di cenere più raffreddato, vediamo spegnersi dolcemente i soli e cerchiamo di ricostruire lo splendore scomparso della formazione del mondo."[1] Lemaître credette di trovare nella radiazione cosmica le particelle dotate di massa che penetrano l'atmosfera terrestre a grandi velocità, il residuo dell'Universo primordiale; bisognava piuttosto cercare una radiazione termica.[2]

Toccò a George Gamow, che aveva appreso la relatività a San Pietroburgo sotto la guida di Fridman e che emigrò poi negli Stati Uniti per sfuggire al regime comunista, arricchire notevolmente l'ipotesi di Lemaître con l'aggiunta della nozione di *temperatura*. Il fisico belga aveva immaginato che all'inizio l'Universo dovesse essere assai denso. Nel 1948 Gamow e i suoi collaboratori Ralph Alpher e Robert Hermann precisarono che doveva essere anche assai caldo. Presupponendo una miscela primordiale di particelle nucleari chiamate *Ylem*, che in ebraico significa "sostanza primitiva a partire dalla quale si pensa siano formati gli elementi", riuscirono anzitutto a spiegare la genesi dei nuclei più leggeri (deuterio, elio, litio) durante i primi tre minuti dell'Universo, un'epoca in cui la temperatura cosmica raggiunse i 10 miliardi di gradi. [▶ **p. 253, L'età dell'Universo**]

1. *Revue des questions scientifiques*, novembre 1931.
2. Tuttavia, i raggi cosmici di ultra-alta energia, scoperti di recente, potrebbero essere stati generati dal Big Bang.

Calcolarono poi che, in un'epoca un po' più tarda, quando si era raffreddato scendendo a qualche migliaio di gradi, l'Universo era bruscamente divenuto trasparente, e aveva lasciato scappare la sua prima luce. Alpher e Hermann dimostrarono con i loro calcoli che si sarebbe dovuta ricevere l'eco del Big Bang sotto forma di una radiazione di "corpo nero".

La radiazione di corpo nero è una sorta di luce universale, il cui spettro (la distribuzione dell'energia in funzione della lunghezza d'onda) è determinato unicamente da una temperatura. Il corpo nero rappresenta una situazione fisica ideale nella quale la radiazione è prigioniera di un contenitore isotermo. È come se scaldaste un forno perfettamente ermetico (che svolge la funzione di corpo nero) al "rosso", diciamo a 3000 gradi. Se fate un piccolo foro nella parete del forno ne esce una radiazione di un determinato colore (rosso, appunto) indipendentemente dalla natura degli oggetti che potreste avervi messo dentro – una chiave, un vaso di ceramica multicolore, dei sassi bianchi o neri. Ciò significa che la radiazione emessa dal corpo nero non dipende dai suoi costituenti, poiché questi hanno raggiunto un equilibrio termico perfetto. La superficie di una stella come il Sole emette una radiazione vicina a quella di un corpo nero; di solito, la luce solare ha colore giallo, poiché corrisponde alla temperatura di poco più di 6000 gradi – quella che regna sulla superficie del Sole.

Nel caso della radiazione di corpo nero, Gamow e i suoi collaboratori calcolarono una temperatura residua di 5 gradi al di sopra dello zero assoluto (5 gradi Kelvin o, come possiamo anche scrivere, 5 K), vale a dire –268 °C. La loro predizione non suscitò alcuna emozione. Rifecero più volte i calcoli fino al 1956, senza destare alcun interesse; nessun tentativo di rilevazione venne intrapreso.

A metà degli anni Sessanta, all'Università di Princeton, i fisici teorici Robert Dicke e James Peebles studiarono modelli di universo oscillanti, nei quali lo spazio in espansione-contrazione, invece d'essere infinitamente schiacciato in un Big Bang, assume un raggio minimo per riprendere un nuovo ci-

clo. In base ai loro calcoli, un "rimbalzo" caldo di questo tipo avrebbe prodotto una radiazione di corpo nero, la cui temperatura attuale sarebbe di 10 K. Proprio mentre stavano per approntare i primi esperimenti, vennero a sapere che una radiazione del genere era stata rilevata, per caso, dai laboratori della Compagnia Bell, nel New Jersey. Due ingegneri, Arno Penzias e Robert Wilson, avevano messo a punto un radiometro da impiegare a fini astronomici, e avevano trovato un rumore di fondo più elevato del previsto. "Mettere a punto" un radiometro significa eliminare il rumore di fondo dell'antenna, o quanto meno filtrarlo. Il vocio delle conversazioni in un'ampia sala per ricevimenti è un rumore di fondo acustico, che si misura in decibel. In radiometria, il rumore di fondo è dovuto all'agitazione degli elettroni dell'antenna e a scariche esterne, ed è espresso da una temperatura. Quando Penzias e Wilson puntarono la loro antenna verso lo zenith, trovarono una temperatura di rumore di fondo di 6,7 K; una volta ricavato il rumore dell'antenna e l'assorbimento da parte dell'atmosfera, restava un eccesso di 3,5 K. Gli ingegneri della Bell Company passarono un anno intero a indagarne le cause, prendendo in considerazione persino lo sterco dei piccioni che erano soliti salire sul corno dell'antenna del radiotelescopio! Ma l'eccesso di temperatura c'era sempre. Poiché non proveniva dall'apparecchio, non dipendeva dalle stagioni, era captato in tutte le direzioni del cielo e aveva le caratteristiche di una radiazione di corpo nero, il rumore di fondo doveva essere di origine *cosmica*. Era la radiazione fossile!

I gruppi di ricerca della Bell Company e dell'Università di Princeton pubblicarono separatamente i loro articoli nello stesso numero dell'*Astrophysical Journal* (luglio 1965). Penzias e Wilson diedero soltanto i risultati delle loro misure; Dicke, Peebles, Peter Roll e David Wilkinson ne indicarono l'interpretazione cosmologica. Nessuno di loro citò le predizioni di Alpher e di Hermann, e tanto meno quelle di Lemaître. Nel 1978 Penzias e Wilson ottennero il Nobel per la fisica. Al momento della loro scoperta propendevano per la teoria dello stato stazionario, rivale di quella del Big Bang. Ma fu

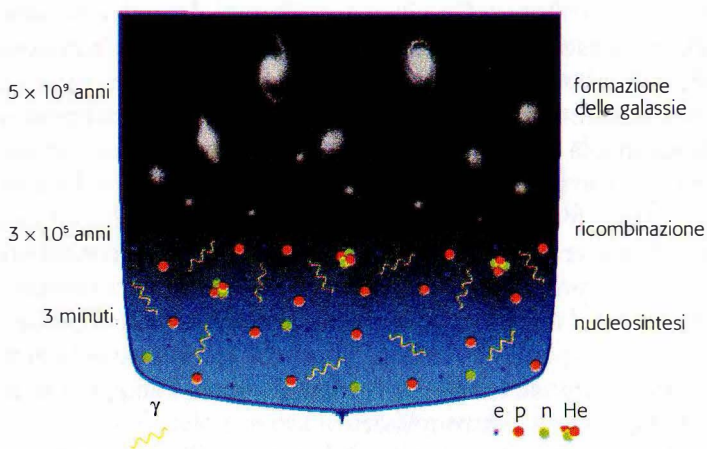
proprio la rilevazione della radiazione fossile a suonare in pratica la campana a morto del modello stazionario! [▶ **p. 263, La matematica cosmica**]

La ricombinazione

Quale meccanismo fisico è all'origine della radiazione fossile? L'Universo primordiale non conteneva alcuna stella, alcuna galassia. Vi era soltanto una miscela di particelle cariche e di radiazione, costituita da nuclei di elementi leggeri, da elettroni, da neutrini e da fotoni, il tutto in equilibrio termico. In altri termini, l'intero Universo era riempito da una materia simile agli strati esterni del nostro Sole attuale. Come la materia solare, il plasma primordiale era troppo caldo per ospitare atomi stabili: non appena un nucleo positivo e un elettrone si sfioravano, la loro velocità di movimento termico era così elevata che non potevano associarsi in un atomo neutro. Di conseguenza, i fotoni (particelle di luce) facevano molta fatica a propagarsi; erano inevitabilmente deviati dagli elettroni liberi. L'Universo primordiale era *opaco*. Nella vita di tutti i giorni, i corpi come il metallo, il legno o la pietra sono opachi proprio perché sono pieni di elettroni liberi che intercettano la luce; mentre i materiali trasparenti, come il vetro o l'acqua, possiedono pochissimi elettroni liberi.

Man mano che l'espansione è proseguita, il plasma primitivo si è raffreddato. Dopo circa 300.000 anni la sua temperatura è scesa a 3000 K, un valore sufficientemente basso perché gli elettroni perdano la loro libertà: si sono combinati in nuclei atomici in base a un processo chiamato *ricombinazione*. Il plasma primordiale si è condensato in un gas neutro di idrogeno ed elio. Tale condensazione è analoga all'evaporazione della nebbia nell'atmosfera terrestre. La nebbia è composta di minuscole goccioline d'acqua in sospensione che diffondono i fotoni della luce; è dunque opaca. Ma quando l'atmosfera è riscaldata dal Sole, le gocce evaporano, si trasformano in vapore acqueo, e l'aria diventa rapidamente trasparente. Un fenome-

no analogo si è svolto nell'Universo primordiale, allorché il plasma si è condensato in gas (raffreddandosi). Avendo perduto i suoi elettroni liberi, l'Universo è diventato trasparente. I fotoni di luce, che erano diffusi senza posa dalle particelle cariche del plasma (da cui il nome di *superficie di ultima diffusione* dato ai loro punti di partenza), sono diventati presto[3] liberi di viaggiare senza freni nello spazio, cosa che fanno da allora.

3000 gradi è la temperatura che regna oggi sulla superficie di stelle come le giganti rosse. Alla ricombinazione, il plasma primordiale era dunque un gigantesco "oggetto" luminoso che occupava l'intero spazio e brillava quanto una stella. Se

38.1 Ricombinazione e trasparenza

A partire da protoni (p) e neutroni (n), i primi nuclei di elio (He) si sono formati dopo 3 minuti, alla nucleosintesi. Solo dopo 300.000 anni di espansione gli elettroni carichi negativamente (e) si sono combinati con i nuclei per formare atomi elettricamente neutri (ricombinazione). L'Universo è diventato allora trasparente, e la radiazione cosmica (γ) ha cominciato a propagarsi.

3. L'Universo non è diventato trasparente all'istante. La superficie di ultima diffusione è, propriamente parlando, uno strato sferico di spessore non nullo; tuttavia, tale spessore è inferiore all'1% del suo raggio. È per questo motivo che i cosmologi, al fine di rendere le cose più semplici, senza però commettere eccessivi errori, trattano spesso lo strato di ultima diffusione come una sfera infinitamente sottile.

non se ne vede di notte (e ancor meno di giorno!) la luce, è perché l'energia di questa radiazione è diminuita nel corso del tempo. [▶ **p. 209, Il paradosso del buio di notte**] In quattordici miliardi d'anni la temperatura è scesa di un fattore 1100, poiché nel medesimo tempo il raggio di scala dell'Universo è aumentato dello stesso fattore. Così vuole la termodinamica cosmica. La radiazione fossile captata attualmente ha una temperatura da corpo nero di 2,7 K e si "vede" soltanto su lunghezze d'onda comprese tra alcuni centimetri e alcuni millimetri – nel dominio radio e delle microonde. I fotoni della radiazione fossile sono comunque assai numerosi: ve ne sono in media 400 per centimetro cubo di spazio. Quando il vostro televisore non è sintonizzato su un qualche canale, sullo schermo vedete della "neve"; ricordatevi che una certa percentuale di questa neve proviene dai fotoni della radiazione fossile!

Le macchie della radiazione fossile

È il gas condensato alla fine della ricombinazione, costituito per tre quarti di idrogeno e per un quarto di elio, che ha necessariamente formato le prime galassie e le prime stelle. Perché ciò accadesse, erano necessarie due cose: dei grumi, ossia degli eccessi di densità nel brodo primordiale, e un tempo sufficientemente lungo per permettere a questi grumi di ingrossarsi sotto l'azione della gravità. Senza tali grumi l'Universo sarebbe sempre rimasto sotto forma di un gas diffuso e perfettamente omogeneo. Non avrebbe contenuto galassie, stelle, pianeti – e *a fortiori* neppure esseri viventi, astronomi, lettori.

Chiaramente, se il plasma primordiale non fosse stato più denso in alcune regioni, le galassie e gli ammassi di galassie osservati non avrebbero potuto essere creati. Le zone che presentano una densità eccedente rispetto a quella normale hanno esercitato una maggiore attrazione gravitazionale sulla materia circostante, attirandola e diventando sempre più dense, rafforzando il loro potere di attrazione, e così via. Attraverso una sequenza di processi complessi, la gravità ha fatto germogliare i

semi degli oggetti celesti. Non sappiamo se a formarsi per primi siano stati le stelle, le galassie o gli ammassi di galassie; si ritiene, tuttavia, che dalla ricombinazione sia dovuto trascorrere come minimo un miliardo d'anni per la comparsa dei primi astri.

Gli scienziati hanno cercato di ritrovare le tracce delle fluttuazioni di densità nell'Universo primordiale. Esse devono tradursi in piccole variazioni di temperatura della radiazione fossile, chiamate "anisotropie", poiché dipendono dalla direzione d'osservazione. Tali anisotropie assumono l'aspetto di macchie, alcune leggermente più calde, altre leggermente più fredde della media di fondo.

Ci sono voluti ventisei anni di ricerche perché si riuscisse a rilevarle, nel 1991, grazie ai radiometri differenziali a microonde (DMR, *Differential Microwave Radiometers*) a bordo del satellite COBE (*COsmic Background Explorer*), lanciato dalla NASA.

È stato un duro lavoro, e per più di una ragione. Da un lato, le microonde sono un dominio dello spettro elettromagnetico difficile da osservare. Soltanto la parte a più bassa energia raggiunge il suolo – cosa che aveva appunto consentito a Penzias e Wilson di scoprirle nel dominio delle onde radio. Ma la parte a più alta energia, che contiene maggiori informazioni sulle macchie calde e fredde della radiazione fossile, è assorbita dall'atmosfera. Occorre dunque imbarcare i telescopi a microonde su satelliti o su palloni stratosferici che raggiungano altezze sufficienti.

Dall'altro lato, la tecnologia tradizionale delle antenne radio male si adatta né è molto sensibile allorché si sale in energia, dalle grandi onde alle microonde, e si intende misurare con grande precisione il rumore di fondo cosmico. Invece di rilevare le onde che fanno vibrare le antenne, si misura il calore che esse trasportano. Per determinare questa quantità così infima di calore occorrono allora termometri sensibili alle basse temperature, chiamati bolometri. Sono raffreddati quasi allo zero assoluto. Per esempio, il rilevatore di COBE era a 2 K, ed è questo che gli ha consentito di captare il segnale a 3 K, nonché le sue piccole variazioni. [▶ **p. 291, La materia oscura**]

Inoltre, contrariamente alle aspettative iniziali, gli scarti di temperatura tra un punto e l'altro del cielo risultano inferiori a un decimillesimo di grado, un livello di fluttuazione paragonabile a quello che sarebbe rappresentato sulla superficie della Terra da una montagna o da una valle il cui dislivello non oltrepassasse i 100 metri.

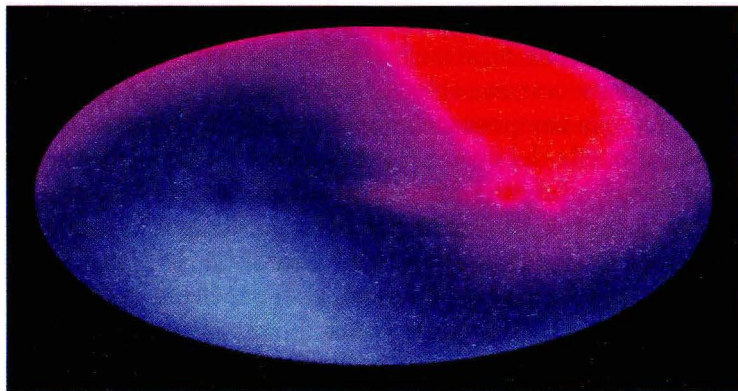
Infine, i dati sono alterati dal rumore dell'antenna e dalle perturbazioni parassitarie che non provengono dalla radiazione fossile, ma da altre sorgenti astronomiche. Per accedere davvero al rumore di fondo occorre sottrarre tutti questi contributi parassitari.

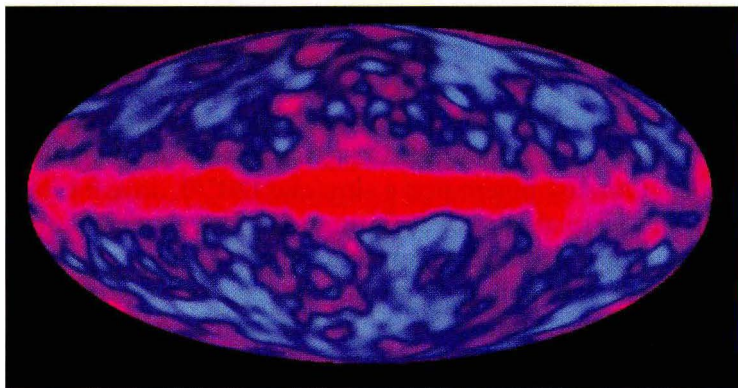
Si è constatato, anzitutto, che la temperatura della radiazione fossile, misurata in una direzione precisa puntando verso la costellazione dell'Acquario, è dello 0,2% più elevata che nella direzione opposta. Questa asimmetria, chiamata "anisotropia dipolare", traduce un effetto locale: il movimento della Terra rispetto a quel lontano sistema di riferimento spazio-temporale che è rappresentato appunto dalla radiazione fossile. Il movimento relativo della Terra rispetto alla sorgente di radiazione comporta, in virtù dell'effetto Doppler, un leggero aumento dell'energia ricevuta nella direzione del movimento e una diminuzione nella direzione opposta. L'anisotropia dipolare misurata da COBE mostra che la Terra si sposta in direzione dell'Acquario con una velocità di 370 km/s. Tale velocità è il risultato della composizione di tutte le velocità particolari della Terra: quella del nostro Pianeta intorno al Sole, quella del Sole intorno al centro della Galassia, quella della Galassia rispetto al centro del nostro Ammasso locale, quella dell'Ammasso locale rispetto al Superammasso locale di Virgo e, per finire, quella del nostro Superammasso rispetto a un "Grande Attrattore".

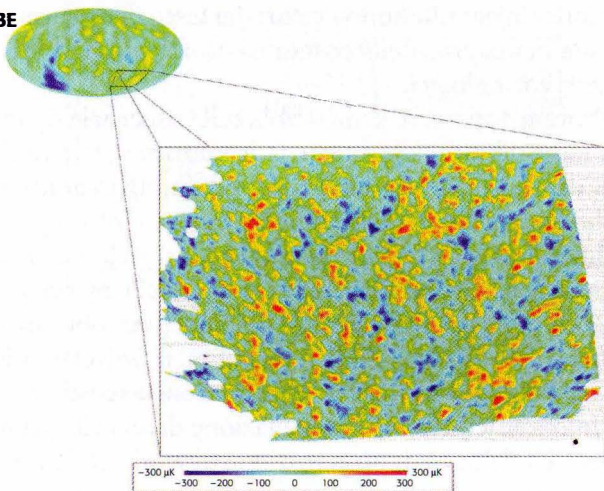
Occorre poi togliere il contributo della nostra Galassia, emesso in microonde essenzialmente nel piano galattico coincidente con la Via Lattea.

Una volta sottratti tutti questi effetti, la temperatura residua del fondo del cielo si rivela dappertutto uguale a 2,728 K (–270,43 °C), con fluttuazioni che non superano un centomil-

lesimo di grado. Questa straordinaria uniformità attesta che l'Universo era estremamente omogeneo all'epoca della ricombinazione, come predetto dai modelli del Big Bang. La mappa delle temperature stabilita da COBE è una proiezione in un piano della superficie di ultima diffusione, simile a un mappamondo, in cui le variazioni della temperatura sono codificate da colori (figura 21.2).

Le variazioni della densità del plasma primordiale sulla superficie di ultima diffusione non sono le sole responsabili delle variazioni di temperatura. La velocità del plasma di elettroni e di fotoni, le variazioni del potenziale gravitazionale dell'Universo sulla superficie di ultima diffusione, nonché le variazioni del potenziale gravitazionale sul tragitto dei fotoni, inducono a loro volta anisotropie di temperatura. Appare chiaro come lo studio dettagliato delle fluttuazioni possa fornire una vera miniera di informazioni sulle condizioni che hanno regnato nell'Universo primordiale, in particolare sui parametri cosmologici quali la curvatura, la densità di materia oscura, la costante cosmologica, ecc. Ma come valutare tutti questi effetti, distintamente l'uno dall'altro?

38.2 Anisotropia dipolare

Questa mappa della radiazione fossile in colori falsati mostra la variazione di temperatura dipolare dovuta allo spostamento Doppler. L'emisfero rosso presenta un'eccedenza massima di temperatura di 3 milliKelvin; il punto più caldo indica la direzione e la velocità del movimento della Terra rispetto alla radiazione fossile.

38.3 Emissione a microonde della Via Lattea

Una volta sottratta l'anisotropia dipolare, le fluttuazioni residue della radiazione fossile sono disturbate dal segnale a microonde emesso dal disco della nostra galassia (in rosso).

38.4 Mappa delle fluttuazioni misurate da Boomerang

Rispetto alla mappa delle fluttuazioni misurate da COBE (figura 21.2), quella ottenuta dall'esperimento Boomerang nel 1999 ha una risoluzione 70 volte migliore, ma una copertura del cielo 25 volte più ristretta. Le macchie calde e fredde osservate nella radiazione fossile sono codificate dai colori. Sono i germi delle grandi strutture che noi oggi vediamo nell'Universo: galassie, ammassi di galassie, superammassi corrispondono alle anisotropie primordiali amplificate dalla gravità.

L'acustica del Big Bang

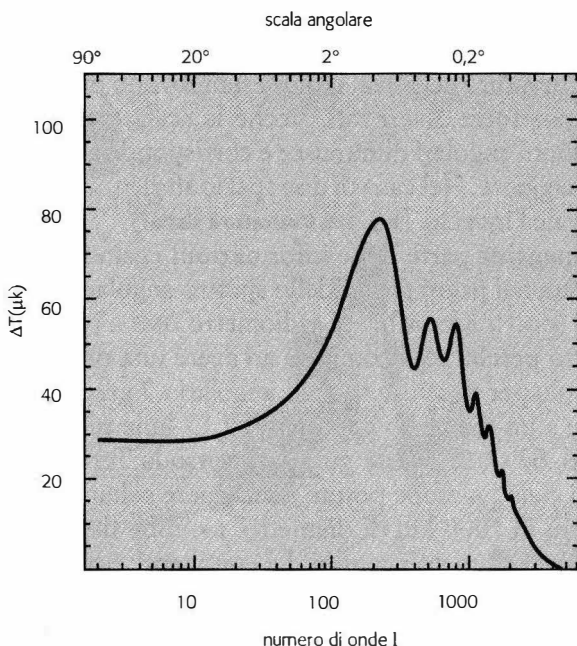
I cosmologi hanno trovato comodo rappresentare le macchie tramite uno "spettro angolare" che traccia l'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura in funzione di un numero di onde l. Questo numero non è altro che 180°/θ, dove θ è l'angolo sotto il quale si vede la fluttuazione. Per un matematico, le fluttuazioni di temperatura sono espresse da una funzione a valori reali su una sfera. In quanto tale, essa può essere scomposta in una serie infinita di armoniche sferiche, proprio come una funzione a valori reali su un cerchio può essere scomposta in una serie infinita di seni e di coseni, detta scomposizione in serie di Fourier. E come i coefficienti di Fourier di un'onda sonora forniscono tutta l'informazione utile sul suono, consentendo per esempio di riconoscere che si tratta di un *mi* bemolle suonato da un oboe, così i coefficienti di Fourier della radiazione fossile riflettono i valori del tasso di espansione, della densità di materia, della costante cosmologica e degli altri parametri cosmologici.

Provate a spargere della sabbia sulla superficie di un tamburo e farne vibrare dolcemente la membrana: vedrete che i granelli di sabbia si raccolgono secondo motivi caratteristici; lo studio dettagliato di questi ultimi contiene l'informazione circa le dimensioni e la forma del tamburo, la sua elasticità, la natura fisica della sua membrana, ecc. L'analisi delle macchie della radiazione fossile assomiglia a quella che si potrebbe fare sulla superficie di un tamburo sferico che vibra. L'Universo primordiale è stato attraversato da vere e proprie onde acustiche.

Un'onda acustica è la propagazione di una vibrazione in un mezzo. La velocità di propagazione dipende dalle caratteristiche (temperatura, densità, ecc.) del mezzo attraversato. Per esempio, il suono si propaga a 331 m/s nell'aria a 0 °C, a 1435 m/s nell'acqua a 8 °C e a 5 km/s nell'acciaio.

Il plasma primordiale si è comportato come l'aria. Le vibrazioni gravitazionali si sono propagate sotto forma di onde acustiche, a una grande velocità, benché inferiore a quella della luce. Passati 300.000 anni, le onde avevano trasportato le vi-

brazioni fino a una certa distanza chiamata "orizzonte sonoro". Queste onde acustiche primordiali non le sentiamo; ma, poiché – come i fotoni – hanno registrato tutte le modificazioni del plasma, le vediamo sotto forma di macchie calde e fredde disseminate sulla superficie di ultima diffusione.

Ci si aspetta che le fluttuazioni siano massime per un angolo di circa un grado. Questa scala corrisponde all'angolo sotteso dall'orizzonte sonoro, cioè la distanza percorsa da un'onda acustica dal Big Bang alla ricombinazione. Poiché le flut-

38.5 Picchi acustici

Lo schema mostra ciò che predice il modello per un universo euclideo riempito di materia fredda ordinaria. L'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura (in milionesimi di gradi Kelvin) è data in funzione della scala angolare alla quale si guarda (in gradi) o, che è lo stesso, in funzione del numero di onde *l*. Il primo picco corrisponde all'orizzonte sonoro. Le oscillazioni secondarie dipendono da parametri quali la curvatura spaziale, la costante cosmologica, il tasso di espansione, il rapporto fotoni/elettroni, ecc.

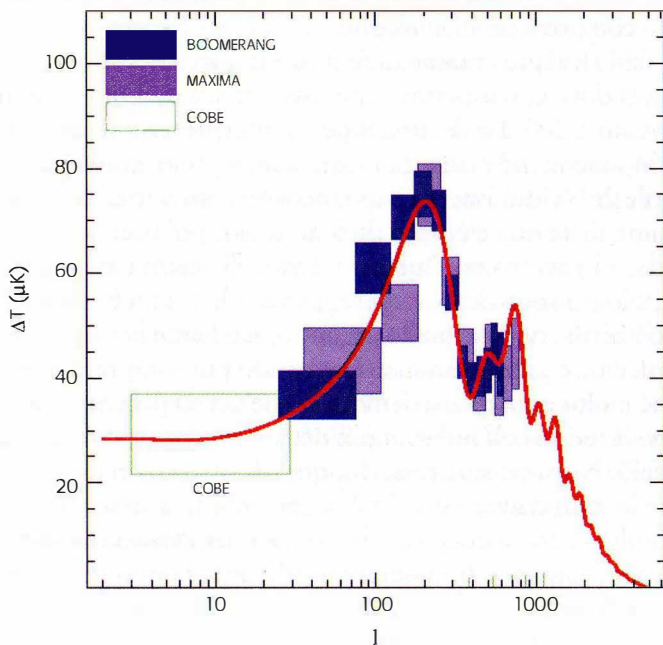
tuazioni raggiungono la massima ampiezza all'orizzonte sonoro, nello spettro angolare delle fluttuazioni compare un "picco acustico" principale, corrispondente a una frequenza fondamentale di vibrazione, seguito da picchi secondari simili alle armoniche musicali, ossia vibranti secondo multipli interi della frequenza fondamentale.

La posizione del primo picco dipende dalla grandezza dell'orizzonte sonoro al momento della ricombinazione. Tale grandezza serve da regolo campione per misurare la geometria dell'Universo. In uno spazio a curvatura nulla, l'angolo sotteso dall'orizzonte cosmico alla ricombinazione è di circa un grado; nello spettro delle fluttuazioni, quest'angolo corrisponde a un numero d'onda $l = 180$. Se lo spazio è iperbolico, cioè a curvatura negativa, i fotoni si muovono più rapidamente su traiettorie divergenti, sicché la scala dominante delle fluttuazioni angolari diminuisce e corrisponde a un numero di onde maggiore. Nel caso di uno spazio sferico, a curvatura positiva, vale l'inverso. [▶ **p. 329, L'universo è piatto?**]

La maggior parte delle informazioni cosmologiche fini è codificata nei primi picchi dello spettro angolare. Sfortunatamente, sono inaccessibili al radiometro DMR a bordo di COBE. E questo perché DMR comincia ad avere una risoluzione adeguata solo per strutture su scale angolari a 7 gradi, il che corrisponde a un diametro apparente di 15 lune piene affiancate tra loro. Se COBE avesse guardato verso la Terra, invece che verso il cielo, avrebbe potuto distinguere soltanto macchie aventi più di 1000 km di diametro: avrebbe dunque colto in modo assai sfumato i confini dei continenti; non avrebbe potuto distinguere, per esempio, tra la Francia e l'Inghilterra. Appare così evidente la differenza tra sensibilità e risoluzione di un rilevatore. La sensibilità consente di misurare un "rilievo" di un centomillesimo di grado; la risoluzione permette di dire che questo rilievo è localizzato in un *pixel* più o meno grosso. Con i soli dati offerti da COBE non si può quindi essere sicuri di aver riconosciuto correttamente questa o quella macchia individuale sulla mappa della radiazione fossile. Tutto quello che si può dire è che, statisticamente, alcune delle mac-

chie che risultano calde sulla mappa lo sono davvero, e che alcune di quelle che risultano fredde lo sono davvero.

In termini di numero di onde, COBE non poteva raccogliere alcuna informazione oltre $l = 25$, ossia molto al di qua del primo picco acustico. È per questo motivo che, dopo COBE, gli scienziati hanno cercato di migliorare la risoluzione e di ridurre il rumore dei loro strumenti. La nuova tecnologia del freddo ha consentito di realizzare tale progresso. Per misurare le anisotropie di temperatura con una precisione del milionesimo di grado, occorre essere capaci di raffreddare il rilevatore a una frazione di grado soltanto al di sopra dello zero assoluto.

Alcuni di questi strumenti sono già all'opera. Boomerang-

38.6 La misura dei picchi acustici

I dati sulle fluttuazioni della radiazione fossile, ottenuti dagli esperimenti COBE, Maxima e Boomerang, sono compresi all'interno di barre di errori. I cosmologi cercano di correggere al meglio il corrispondente spettro di fluttuazioni angolari (in rosso).

98 è un esperimento a bordo di un pallone stratosferico volto a misurare le anisotropie della radiazione di corpo nero tramite bolometri raffreddati a 0,3 K. Quest'esperimento italo-americano ha effettuato il suo primo volo di lunga durata (più di dieci giorni intorno all'Antartico) tra il dicembre 1998 e il gennaio 1999. I dati raccolti sono eccezionali: da un lato, la loro sensibilità ha consentito di raggiungere il milionesimo di grado; dall'altro, la loro risoluzione angolare (10 minuti d'arco, 70 volte meglio di COBE) ha permesso di accedere a numeri di onde $l = 800$. In 190 ore di osservazioni è stata coperta una frazione di cielo del 4%.

Maxima-1, altro esperimento su pallone, è partito nell'agosto 1998 e ha volato per dieci ore a trentanove chilometri d'altezza sopra il Texas. È stato seguito da Maxima-2 nel giugno 1999, con prestazioni analoghe.

I dati rivelano chiaramente il primo picco acustico; esso si trova là dove ci si aspettava che fosse, cioè a un numero di onde vicino a 200. La decifrazione e l'interpretazione degli altri picchi sono meno evidenti. I risultati sono stati annunciati nell'aprile 2000, durante una spettacolare conferenza stampa, al termine della quale è stato dichiarato, un po' prematuramente, che l'Universo era "piatto". I vincoli relativi ai parametri cosmologici sono determinati aggiustando al meglio lo spettro angolare osservato e quello predetto, mediante le variazioni di una decina e più di parametri, restando pur sempre entro una classe molto particolare di modelli che sin da principio favoriscono la teoria dell'inflazione, a detrimento degli altri possibili modelli. Nessuna sorpresa, dunque, di ritrovare nella conclusione le ipotesi avanzate: l'inflazione, infatti, implica uno spazio molto vicino a quello euclideo! [▶ **p. 329, L'Universo è piatto?**]

Comunque sia, Boomerang e Maxima hanno inaugurato l'era della cosmologia osservativa di alta precisione. Che ne è dei *parametri topologici* che qui ci interessano più di ogni altra cosa? Dobbiamo constatare che, indipendentemente dalla precisione raggiunta nella misura fine della curvatura, gli esperimenti compiuti si rivelano inefficaci per quanto concerne il controllo della topologia dell'Universo. Non coprono

che qualche grado quadrato del cielo. La topologia è una proprietà dell'Universo a grandissima scala. Per rilevarla o per scartarla in maniera convincente occorrono mappe ad altissima risoluzione dell'intero cielo. Come nel caso della cristallografia cosmica, il miraggio topologico creato dall'eventuale forma spiegazzata dello spazio è globale, e non localizzato. Il metodo delle coppie di cerchi predice correlazioni di temperatura in direzioni molto differenti. [▶ **p. 155, Cerchi in cielo**] Invece di inviare un esercito di palloni, con a bordo ciascuno un bolometro destinato a calibrare una piccolissima porzione del cielo, e di raccogliere i dati in un immenso patchwork per stabilire una mappa completa, sarebbe meglio collocare i bolometri su un satellite; qui il tempo di osservazione e l'orientabilità sono sufficienti per coprire la totalità del cielo. Solo gli esperimenti su satellite potranno fornire una copertura completa del cielo, a eccezione della zona occupata dalla Via Lattea.

La comunità scientifica si aspetta molto dai due satelliti ideati a tale scopo. Il primo, chiamato WMAP (acronimo di *Microwave Anisotropy Probe*, ossia sonda dell'anisotropia microonde), è stato costruito da un gruppo di ricercatori appartenenti a parecchie istituzioni americane, sotto la supervisione dell'Università di Princeton e della NASA. Lanciato nel 2001, WMAP sarà posizionato a 1,5 milioni di chilometri dalla Terra, in una situazione orbitale in opposizione diretta al Sole, nota come punto di Lagrange. Si tratta di una collocazione ideale, in quanto le tre sorgenti più brillanti del cielo (quelle che producono più disturbi nel dominio delle microonde), cioè il Sole, la Terra e la Luna, si trovano tutte e tre raggruppate alle spalle dello strumento.

WMAP rappresenta un notevole miglioramento rispetto al radiometro differenziale a microonde (DMR) utilizzato su COBE, poiché dispone di due telescopi a microonde i cui segnali saranno sottratti elettronicamente, per dare le differenze di temperatura nelle due direzioni del cielo. Le differenze saranno misurate tra 3 e 14 millimetri di lunghezza d'onda. Poiché WMAP ruoterà su se stesso, le direzioni in cui punteranno i suoi

telescopi cambieranno, di modo che, nei 24 mesi previsti per la missione, saranno misurati gli scarti di temperatura tra parecchi milioni di coppie di direzioni, e i dati saranno periodicamente trasmessi alla Terra. Gli scienziati del programma WMAP potranno così ricostruire una mappa ad alta risoluzione delle fluttuazioni di temperatura del fondo del cielo, con una sensibilità di 0,00002 K per *pixel* di 0,3 gradi quadrati.

Planck è una missione dell'Agenzia Spaziale Europea, programmata per il 2007. Il suo obiettivo è misurare le anisotropie della radiazione fossile su tutte le scale angolari superiori a 10 minuti d'arco. Per riprendere l'analogia geografica, ciò equivarrebbe a misurare dettagli di una quindicina di chilometri sulla superficie della Terra. Il progetto nel suo stato attuale prevede un radiotelescopio di 1,5 metri, imbarcato su un vascello spaziale che sarà anch'esso posizionato nel punto di Lagrange. Contrariamente a WMAP, che misura soltanto differenze di temperatura, Planck misurerà le temperature assolute, e fornirà così direttamente la mappa del fondo del cielo.

Planck avrà accesso a un dominio di lunghezze d'onda più ampio e a più alta energia di WMAP, compreso tra 0,3 e 10 millimetri. La sua risoluzione angolare, la sua copertura in frequenze e la sensibilità delle mappe ottenute supereranno quelle di WMAP, e ciò è il minimo che ci si possa aspettare da una missione programmata cinque anni dopo... Infine, Planck sarà il primo a misurare la polarizzazione della radiazione fossile e a dare informazioni circa le onde gravitazionali emesse dall'Universo primordiale.

LETTURE CONSIGLIATE

M. LACHIÈZE-REY, E. GUNZIG, *Le Rayonnement cosmologique*, Masson, Paris 1995.

G. SMOOT, K. DAVIDSON, *Nelle pieghe del tempo: la scoperta dell'universo neonato*, Mondadori, Milano 1994.

Sito Internet: www.sns.ias.edu/~whu.

39

L'UNIVERSO È PIATTO?

> Il contadin lo crede
> schiacciato scudo, ma il pensier
> del saggio l'arrotonda.
>
> JEAN DE LA FONTAINE

"L'Universo è piatto", ha titolato un quotidiano nella primavera del 2000, sollevando un'ovazione quasi unanime nella comunità scientifica per quei ricercatori che avevano ricavato tale risultato sperimentale dai nuovi dati sulle macchie della radiazione fossile pubblicati su *Nature.* Tuttavia, quel titolo è fuorviante, e per più di una ragione.

Tanto per cominciare, è sbagliato nella formulazione: l'Universo *non può* essere piatto. Tutti i discorsi che oggi facciamo sull'Universo si basano sulla cosmologia relativistica. E in relatività l'Universo non si riduce al solo spazio cosmico che contiene le stelle, le galassie, l'energia del vuoto, ecc.: l'Universo è uno *spazio-tempo.* Il maggiore risultato della cosmologia relativistica al riguardo è che lo spazio-tempo possiede una *dinamica* (espansione, decelerata o accelerata, contrazione, oscillazioni,...) che si traduce automaticamente in una curvatura spazio-temporale. L'unico modello relativistico realmente piatto è lo spazio-tempo di Minkowski; ma, poiché è privo di materia e di gravità, non può rappresentare in alcun caso l'Universo osservato. I modelli statici di Einstein e di de Sitter sono "temporalmente piatti" nel senso che il loro raggio di curvatura resta costante; ma la loro curvatura spaziale è

positiva. [▶ p. 263, La matematica cosmica] Sono comunque confutati dall'osservazione degli spostamenti verso il rosso cosmologico. I buoni modelli relativistici sono quelli di Fridman-Lemaître. Hanno tutti una curvatura spazio-temporale, e anche la loro parte spaziale è curvata, eccetto che nel caso estremamente particolare del modello euclideo, a curvatura nulla.

È proprio a quest'ultimo che alludeva il titolo da cui siamo partiti: lo spazio (e non l'Universo) sarebbe piatto. Ma anche così corretta, questa formulazione resta insoddisfacente. L'aggettivo *piatto*, reso in inglese talvolta con *flat*, si riferisce soltanto alle superficie, non ai volumi. Sarebbe stato più esatto dire: "Lo spazio è a curvatura nulla"; oppure: "Lo spazio è euclideo".

Distinguere tra "Universo" e "spazio", nonché tra "piatto" e "euclideo", potrebbe sembrare una civetteria da specialisti amanti del rigore, una cosa del tutto fuori luogo in ambito divulgativo. Nient'affatto! Se si vuole che il pubblico comprenda quel che accade, occorre essere molto attenti nella scelta dei termini. Le parole "Universo" e "piatto" hanno un significato preciso nel dizionario, che non corrisponde affatto a quello che gli è conferito nella formula: "L'Universo è piatto". Di conseguenza, invece di informare il lettore, tale annuncio lo disinforma. Da quando la notizia è stata diffusa dai periodici e ripresa da radio e televisioni, molte persone si sono fatte un'immagine interamente sbagliata della forma dell'Universo, come ho avuto modo di constatare a più riprese. Alcune hanno creduto, per esempio, che tutte le galassie fossero disposte su un piano infinito. Altre hanno pensato che Einstein e la sua teoria della relatività generale, secondo la quale l'Universo è incurvato dalla materia, fosse contraddetta dalle nuove osservazioni astronomiche. Il loro ragionamento è, più o meno, il seguente: la materia incurva lo spazio; più materia implica più curvatura (il buco nero, infatti, incurva lo spazio circostante più di quanto faccia il Sole); se lo spazio è piatto significa che non ha curvatura, il che vuol dire che ha poca o nessuna materia; l'Universo sarebbe, dunque, troppo vuoto per essere curvo sulla scala di miliardi di anni luce.

Tale ragionamento è sbagliato. Se lo spazio cosmico ha in media una curvatura nulla, non è perché è "troppo vuoto", ma al contrario perché è "mediamente pieno". Più precisamente, è perché il suo parametro di densità Ω, definito come il rapporto tra la densità reale (incluse tutte le forme di materia e di energia) e la densità critica, è uguale a 1. Uno spazio davvero "troppo vuoto", poniamo con Ω minore di 1, è *fortemente* incurvato; la sua curvatura è negativa,[1] certo, ma si tratta pur sempre di una curvatura.

Per concludere su questo primo punto, è compito del divulgatore e del giornalista scientifico essere particolarmente attenti nella scelta delle parole – nonché correggere le dichiarazioni talvolta poco rigorose degli stessi scienziati professionisti.

In secondo luogo, pretendere che lo spazio sia piatto è un errore dal punto di vista logico. A rigore equivale a dire che la densità totale della materia Ω è uguale a un valore ben definito dalla teoria, e ciò con *precisione infinita*. Ora, è evidente che nessun esperimento di fisica potrà mai dare come risultato una misura con precisione infinita. Qualsiasi misura comporta una *barra d'errore*. È deplorevole che gli scienziati che hanno spinto a quel titolo abbiano dichiarato di poter "dire con grande certezza che l'Universo è piatto". Hanno sacrificato il rigore allo scoop. Sarà sempre *impossibile* provare (nell'accezione sperimentale del termine) che lo spazio è piatto.

Anzi, questo è l'unico caso che non potrà mai essere provato! Diversamente andrebbe, infatti, con uno spazio sferico (a curvatura positiva) o con uno iperbolico (a curvatura negativa), dal momento che queste soluzioni corrispondono a *intervalli* di valori possibili del parametro di densità ($1 < \Omega < \infty$ per il caso sferico; $0 < \Omega < 1$ per quello iperbolico). Supponiamo che, in futuro, la precisione dei dati sperimentali dia una barra d'errore interamente contenuta in uno di questi due intervalli (per esempio, $1{,}05 < \Omega < 1{,}23$): avremo effettivamente la prova sperimentale che lo spazio è curvo (positivamente, nel mio esempio).

1. In tal caso lo spazio ha una geometria iperbolica.

La reale situazione sperimentale è la seguente. I dati sullo spettro della radiazione fossile, ottenuti dagli esperimenti su pallone Boomerang-98 e Maxima-1, e interpretati in base a determinati modelli teorici, forniscono una barra d'errore di $0,95 < \Omega < 1,25$ con un "grado di fiducia" del 95%. A partire da qui non si può dire granché circa la curvatura dello spazio, se non che il caso euclideo $\Omega = 1$ si trova entro la barra d'errore, senza essere particolarmente "in mezzo". Ciò significa, semplicemente, che lo spazio osservato ha un raggio di curvatura superiore a quello dell'orizzonte cosmologico, e che ci appare quasi "piatto", proprio come un pallone di parecchi metri di diametro apparirebbe piatto a un batterio il cui orizzonte non superasse alcuni micron. Diremmo in questo caso che il pallone è piatto, e il suo volume infinito? A furia di sentirsi dire che l'Universo è rigorosamente piatto, il pubblico tende a concluderne che lo spazio sia infinito (in genere, ignora la possibilità di un Universo *chiffonné*, ovvero spiegazzato). Basterebbe soltanto $\Omega = 1,00001$ perché lo spazio fosse sferico, e necessariamente di volume finito. La distinzione tra finito e infinito è ugualmente di "taglia"!

In realtà, gli esperimenti Boomerang e Maxima, avendo mappato soltanto una piccola parte del fondo del cielo, non ci dicono *nulla* circa le proprietà geometriche globali dello spazio. [▶ **p. 311, La radiazione fossile**] Potremmo essere tentati di rettificare il titolo proponendo: "Lo spazio è debolmente incurvato", poiché il parametro di densità Ω si avvicina a 1. Ma anche questo sarebbe un madornale errore! Debolmente incurvato rispetto a quale scala di riferimento? Di fatto, i cosmologi normalizzano la curvatura dello spazio a tre numeri interi, $k = -1$, $k = 0$, $k = +1$, a seconda che lo spazio sia iperbolico, euclideo, sferico. Per $\Omega = 1,00001$, $k = +1$, e non si può dire che $+1$ sia "debolmente maggiore" di 0. Il rapporto tra questi due numeri è infinito!

Si commetterebbe un altro errore se si credesse che, poiché lo spazio ha curvatura nulla, la fine apocalittica del cosmo, annunciata dai sostenitori dell'ipotesi del Big Crunch, non avrà luogo. E ciò unicamente perché il contributo della costante

cosmologica sarebbe sufficientemente grande per accelerare l'espansione. Anche se la quantità totale d'energia contenuta nell'Universo fosse maggiore della densità critica, e di conseguenza lo spazio fosse chiuso in forma di sfera, sarebbe comunque in espansione perpetua a causa della costante cosmologica, e non della curvatura.

Per concludere su questo secondo punto, una formulazione corretta del famigerato titolo sarebbe: "La parte spaziale dell'Universo osservabile è approssimativamente euclidea". Ammetto che non è un granché...

Procediamo nell'analisi. Perché la maggior parte degli stessi scienziati, normalmente rigorosa, si presta al gioco di una semplificazione illecita? Un esame più approfondito della cosa schiude interessanti prospettive di "sociologia della scienza", ignorate non soltanto dal grande pubblico, ma anche da quei mediatori che sono i giornalisti scientifici. La scienza, e in particolare la cosmologia, non è affatto al sicuro da quel flagello che è il pensiero unico. Funziona su consensi provvisori, ossia su opinioni condivise dalla maggioranza. Ben inteso, contrariamente ad altri ambiti di ricerca, come la filosofia o la politica, queste opinioni non sono in partenza puramente soggettive, ma risultano da un accordo soddisfacente tra teoria ed esperienza. Un consenso che sopravvive troppo a lungo ha, però, la tendenza a tradursi in una sorta di ortodossia. Si assiste così alla messa in atto di un vero e proprio terrorismo intellettuale nei confronti di ogni dissenso. Nella storia della cosmologia, l'aristotelismo è forse il migliore esempio di un programma di ricerca che, dopo essere stato inizialmente originale e innovativo, si è sclerotizzato finendo per frenare lo sviluppo della disciplina per quasi due millenni.

Mutatis mutandis, il modello dell'inflazione svolge da una ventina d'anni il ruolo di una concezione cosmologica originale che si è però trasformata in una sorta di pensiero terroristico, mascherato sotto il più nobile termine di "paradigma". L'inflazione è un modello tratto dalla fisica delle alte energie, in base al quale l'Universo avrebbe conosciuto, nelle prime

frazioni di secondo della sua evoluzione, un tasso di espansione freneticamente elevato, al punto che lo spazio sarebbe divenuto piatto. A prima vista, sembrerebbe trovare conferma nelle osservazioni più recenti. Come attesta lo stesso clamore della stampa: "Ha vinto l'inflazione", "Confermata l'inflazione", si è letto su più di un giornale. È evidente che la lobby dell'inflazione abbia cercato di imporre tutto ciò. Ma è davvero così? Per saperlo, dobbiamo entrare nel cuore dell'argomento ed esaminare da vicino come si è ottenuta la conclusione $\Omega = 1$, a partire dai dati degli esperimenti Boomerang e Maxima.

Grazie a un certo numero di ipotesi, alcune plausibili, altre meno, si è calcolato teoricamente tutto un ventaglio di spettri angolari delle fluttuazioni della radiazione fossile, facendo variare una decina di parametri cosmologici. Sono stati poi confrontati con lo spettro osservato, e vari parametri sono stati accordati "al meglio". Ma quando si entra nell'era di una cosmologia sperimentale ad alta precisione, diventa sempre più difficile capire come i parametri cosmologici siano estratti dai dati osservativi. Le anisotropie di temperatura sono influenzate da un gran numero di fattori: il tasso di espansione, la curvatura dello spazio, la topologia dello spazio, la densità di energia del vuoto, la densità barionica, il numero di specie differenti di neutrini, l'ampiezza e lo spettro delle perturbazioni della densità primordiale, ecc. Varie cause differenti producono effetti simili. Le forchette dei vincoli sbandierate ai quattro venti devono essere prese con molta precauzione.

Il lettore attento avrà più di un motivo di perplessità, se si immerge nello studio dettagliato degli articoli scientifici dedicati all'argomento. L'analisi fine dello spettro angolare delle fluttuazioni fa pensare, infatti, che il massimo di verosimiglianza per Ω è 1,2 e non 1. Sarebbe logico concluderne che la bilancia sperimentale pende in favore di uno spazio sferico, di volume finito, benché dotato di un grande raggio di curvatura, e in espansione perpetua grazie alla costante cosmologica. Un singolare ritorno ai modelli proposti tra il 1927 e il 1933 da Lemaître (vedi figura 36.1), che renderebbe però

l'annuncio di una "rivoluzione cosmologica" quanto meno eccessivo. [▶ p. 263, La matematica cosmica] Tuttavia, è proprio questo che la lobby dell'inflazione fatica a digerire, tanto più che *nessun* modello d'inflazione predice $\Omega > 1$. Si pensi alla maniera straordinaria in cui i tre gruppi di ricercatori responsabili degli esperimenti COBE, Boomerang e Maxima si sono trovati nel luglio 2000 per redigere insieme un articolo sugli "ultimi" valori dei parametri cosmologici (come si parla dell'"ultima moda" parigina). Il loro modo di procedere ha dello stupefacente: l'obiettivo non è più trovare il migliore accordo tra i vari parametri (che darebbe segnatamente $\Omega = 1{,}2$ per la densità totale), ma calcolare il valore degli *altri* parametri cosmologici, presupponendo in partenza $\Omega = 1$. In altri termini, lo scenario di uno spettro di fluttuazioni prodotto dall'inflazione viene assunto *già tra le ipotesi*. Non sorprende che lo si ritrovi nella conclusione! Questo tipo di espediente è reso possibile dal fatto che $\Omega = 1$ è effettivamente compatibile con i dati. Ma se i dati sulla radiazione fossile ottenuti dalla missione spaziale WMAP o attesi da Planck confermeranno il modello sferico, i cantori dell'inflazione dovranno rivedere il loro spartito.

Non intendo minimizzare l'importanza dei dati raccolti dagli esperimenti Boomerang e Maxima. Mai prima d'ora la cosmologia osservativa ha raggiunto tale precisione. Le barre d'errore e il fascio di ipotesi implicite lasciano, però, la porta aperta a interpretazioni più originali di quelle di un Universo banalmente piatto.

40

LA SIMMETRIA

> Il senso della simmetria è un istinto che poggia su una fiducia quasi cieca. È l'essenza poetica dell'universo, di questo Universo che, nella perfezione della sua simmetria, è semplicemente il più sublime dei poemi.
>
> EDGAR ALLAN POE

La simmetria è presente ovunque in natura, dal nostro volto alle ali di un uccello, dalle foglie d'albero ai cristalli atomici. La si ammira anche in opere umane. Non c'è cultura la cui arte e la cui architettura non ci mostrino capolavori di semplicità e di equilibrio, grazie ai precetti di simmetria applicati nella loro costruzione.

In geometria un oggetto possiede una data simmetria se angoli di vista differenti ne offrono immagini indiscernibili. Una simmetria è, pertanto, un'operazione matematica che lascia una forma globalmente invariata.

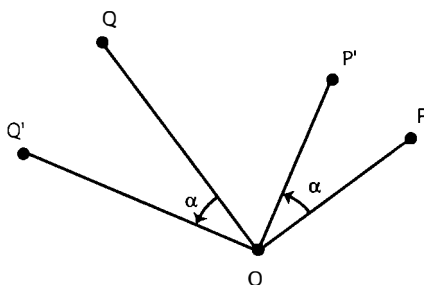
Disegniamo un cerchio su un foglio di carta; tracciamo poi un cerchio dello stesso raggio su un foglio trasparente e sovrapponiamo le due figure. Vi è un'infinità di modi di posizionare il calco in maniera che i due cerchi restino indistinguibili: il cerchio è simmetrico rispetto a tutte le permutazioni da una parte e dall'altra di tutti i suoi diametri. In geometria questa proprietà viene formalizzata dicendo che il cerchio è invariato rispetto a tutte le *rotazioni* di angolo qualunque intorno al suo centro.

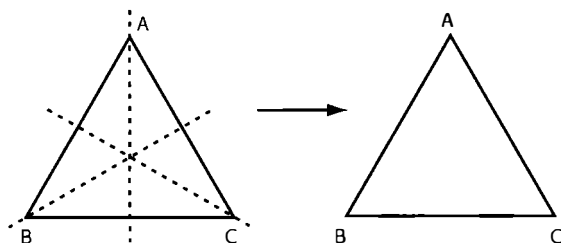
Pure a livello intuitivo si avverte che il cerchio possiede una sorta di simmetria perfetta. Anche altre figure presentano regolarità, pur essendo meno simmetriche del cerchio. Tracciamo, per esempio, su due fogli due triangoli equilateri; vi sono solo sei modi di spostare il calco in maniera che le due figure coincidano: tre rotazioni di 120 gradi ciascuna, o tre capovolgimenti del foglio rispetto alle bisettrici (figura 40.2).

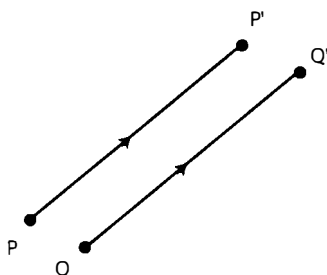
Analogamente, un quadrato è invariante per rotazioni di un quarto di angolo giro, un pentagono per rotazioni di un quinto di angolo giro, ecc. nonché per certe operazioni di capovolgimento, dette *riflessioni*. Una riflessione è la trasformazione geometrica che fa corrispondere a un punto un altro punto situato esattamente sull'altro lato di una retta chiamata asse di simmetria, alla stessa distanza e nella direzione perpendicolare. Le esperienze pratiche che abbiamo descritto con gli specchi dipendono appunto da certe operazioni di riflessione, in cui lo specchio svolge il ruolo di asse di simmetria. [▶ **p. 19, Gioco di specchi**]

La forma di una figura piana o di un oggetto di estensione finita, per esempio la foglia di un albero, può essere interamente indagata nei suoi elementi di simmetria grazie alle sole riflessioni e rotazioni. Di contro, l'intero piano presenta altri tipi di simmetria, che si manifestano non appena si cerca di ritagliarlo in motivi ripetuti all'infinito. Queste pavimentazioni o tassellazioni si trovano ovunque nell'arte decorativa: tappezzerie, pavimenti, mosaici, ecc. Per analizzarle occorrono simmetrie supplementari. Una di queste è la *traslazione*.

Una traslazione è uno spostamento rettilineo operato in una data direzione e a una data distanza. È una trasformazione assai semplice, che tocca poco gli oggetti: se tutti i punti di una figura sono spostati della medesima lunghezza e nella stessa direzione, la figura resta identica a se stessa; l'abbiamo semplicemente fatta scorrere un po' più in là, come se fosse su rotaie.

Le combinazioni tra operazioni di simmetria sono interessanti. Tanto per cominciare, è facile comporre insieme simmetrie della stessa natura. Due rotazioni combinate tra loro danno

40.1 Rotazione

Una rotazione d'angolo α nel piano intorno a un punto O trasporta un punto P in un punto P', tale che $OP = OP'$, e l'angolo formato da OP e OP' è uguale a α.

40.2 Simmetrie di un triangolo equilatero

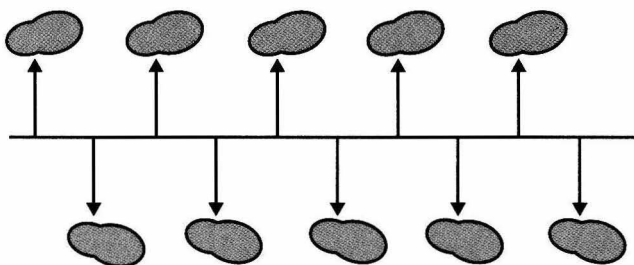
Sei operazioni elementari lasciano invariato un triangolo equilatero: tre rotazioni di 120° intorno al centro e tre riflessioni rispetto alle rette bisettrici (tratteggiate).

40.3 Traslazione

Una traslazione di lunghezza L nel piano trasporta i punti P e Q in P' e Q', tali che $PP' = QQ' = L$.

luogo a un'altra rotazione, il cui angolo è uguale alla somma degli angoli delle due rotazioni. Due traslazioni successive sono equivalenti a una traslazione la cui lunghezza è uguale alla somma delle lunghezze delle due traslazioni. Nel caleidoscopio formato da specchi a orientazione multipla le immagini risultano da una combinazione delle riflessioni associate ai vari specchi.

La proprietà in base alla quale la combinazione di due simmetrie dà luogo a una simmetria della stessa natura caratterizza una struttura matematica fondamentale, la struttura detta di *gruppo*. La teoria dei gruppi non è che la formalizzazione matematica atta a classificare le simmetrie in spazi di dimensione qualsiasi. Per dirla con Jules-Henri Poincaré, "la teoria dei gruppi è, per così dire, l'intera matematica spogliata della sua materia e ridotta a pura forma".

Non meno interessante è combinare insieme simmetrie di natura differente. Per esempio, una *glissoriflessione* è il risultato di una riflessione rispetto a una retta data, seguita da una traslazione lungo questa stessa retta. Tracce di passi nella neve, se ben regolari, presentano questa simmetria rispetto al cammino centrale (figura 40.4).

Le quattro operazioni di simmetria nel piano – rotazioni, riflessioni, traslazioni e glissoriflessioni – hanno un'importante proprietà comune: preservano le distanze. In altri termini, qualsiasi segmento di lunghezza data, se viene trasformato per mezzo di una qualunque di queste operazioni o di una qualun-

40.4 Glissoriflessione

Una glissoriflessione è la combinazione di una traslazione e di una riflessione.

que delle loro combinazioni, conserva la medesima lunghezza. Da qui la scelta del nome *isometrie* (dal greco *iso*, "uguale", *metron*, "misura") per tali trasformazioni. Dal momento che la procedura che consente di misurare la distanza tra due punti di uno spazio qualsiasi, chiamata *metrica*, è una delle caratteristiche essenziali della geometria, le isometrie svolgono un ruolo privilegiato nello studio delle forme globali degli spazi e delle loro topologie.[1]

La classificazione dei gruppi di isometrie permette, in particolare, di catalogare tutte le pavimentazioni regolari del piano a partire da una cellula fondamentale, su cui si effettuano varie traslazioni, rotazioni, riflessioni, glissoriflessioni e loro possibili combinazioni. Trasponendo, per esempio, un parallelogramma in due direzioni differenti mediante due traslazioni indipendenti si copre il piano di un reticolo infinito, in cui ciascun parallelogramma può essere considerato una cellula fondamentale. Ma la scelta della cellula non è unica. Non importa quale parallelogramma venga scelto, e ciò vale anche per forme che non sono più parallelogrammi. Si può pavimentare un suolo tanto con quadrati quanto con piastrelle esagonali.

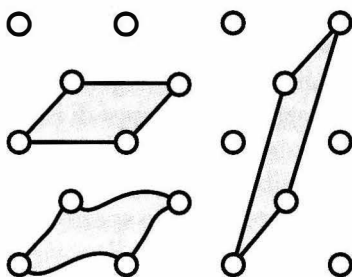
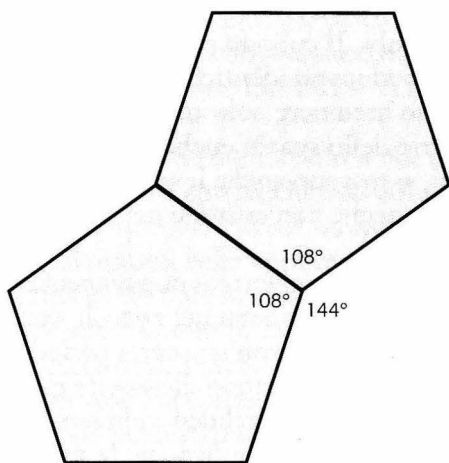
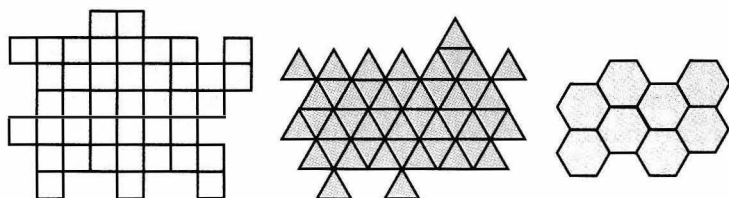
Nel 1891 il mineralogista russo Evgraf Stepanovič Fedorov dimostrò che il numero di gruppi di simmetria che permettono di pavimentare regolarmente il piano è uguale a 17. Nel 1922 l'archeologo Andreas Speiser fece notare che questi diciassette gruppi erano stati scoperti empiricamente quattromila anni prima, nell'arte ornamentale. Studiando i tessuti greci, i pavimenti egizi e i mosaici dell'Alhambra a Granada, aveva constatato che erano formati da motivi identici, combinati in simmetrie semplici o composte, dove tutte le operazioni possibili si riducevano alle diciassette indicate da Fedorov.

1. Un esempio di simmetria piana che non è un'isometria è l'omotetia: un punto è trasformato in un altro tramite la moltiplicazione della propria distanza rispetto a un determinato punto fisso per un numero costante. Un quadrato trasformato per omotetia di un fattore due dà un quadrato di lato due volte più lungo, e dunque una superficie quattro volte più grande.

L'innumerevole varietà degli ornamenti piani, dunque, può ridursi a una descrizione matematica esaustiva.

La libertà nella scelta di selezionare la cellula fondamentale permette di pavimentare l'intero piano con un motivo di forma arbitraria. A questo precetto si è ispirato l'incisore olandese Maurits Cornelis Escher. Nel 1936 il giovane artista si recò all'Alhambra, dove rimase affascinato dalle pavimentazioni moresche. Poco dopo la visita a Granada, lesse un articolo divulgativo che il matematico di origine ungherese George Pólya aveva pubblicato nel 1924 sui gruppi di simmetria nel piano. Senza comprenderne l'aspetto astratto, Escher seppe estrarne i diciassette gruppi di simmetria che vi erano descritti. Tra il 1936 e il 1941 applicò queste sue nuove conoscenze in una serie impressionante di stampe che presentavano tutte le pavimentazioni periodiche possibili. Diversamente dall'arte islamica, che doveva accontentarsi di motivi puramente geometrici, Escher utilizzò forme animali o umane: farfalle, pesci, lucertole, diavoletti. Entrò in contatto con matematici famosi come Donald Coxeter e Roger Penrose, e lavorò in collaborazione con loro. Introducendo nelle sue stampe motivi di colore – una dimensione supplementare che non era stata considerata da Fedorov-Escher inaugurò un nuovo settore della geometria, la teoria dei gruppi di simmetrie policromatiche, sviluppata ulteriormente da Coxeter.[2]

Non si può realizzare una pavimentazione con pentagoni. Ma anche i pavimenti semiregolari, composti a motivi differenti, rappresentano un campo di studio affascinante, che è stato formalizzato dai lavori matematici di Roger Penrose. Anche in questo caso, i pavimenti in questione sono stati dapprima esplorati empiricamente dagli artisti. L'origami, l'arte tradizionale di piegare la carta così apprezzata in Giappone, è legata a tassellazioni semiregolari del piano; come ha potuto verificare chiunque abbia fabbricato una gallina di carta, i tas-

2. Vedi per esempio B. Ernst, *Der Zauberspiegel des M.C. Escher*, Taschen Verlag, Köln 1994; G.W. Locher (a cura di), *Le Monde de M.C. Escher*, Éditions du Chêne, Paris 1992.

40.5 Cellule differenti per un medesimo reticolo

40.6 L'impossibilità di una pavimentazione pentagonale

40.7 Le tre pavimentazioni regolari del piano

selli sono poligoni quali triangoli, rettangoli, ecc., che non sono tutti identici. [▶ p. 355, Classificazione delle superficie]

Sempre in due dimensioni, ma passando a geometrie non euclidee, la classificazione dei gruppi di isometrie e il repertorio delle pavimentazioni regolari determinano esattamente tutte le topologie possibili delle superficie.

Che ne è delle simmetrie per lo spazio a tre dimensioni? La simmetria di rotazione è manifesta: il movimento del tornio da vasaio o quello del nostro pianeta su se stesso sono altrettanti esempi che definiscono il nostro mondo euclideo.

La sfera è invariante per tutte le rotazioni spaziali intorno al suo centro; un cubo, invece, deve essere ruotato di 90 gradi (o di un multiplo intero di 90 gradi) perché il suo aspetto esterno non cambi. Il cubo fa parte dei poliedri regolari, figure che si riproducono identiche sotto certe rotazioni i cui angoli possono assumere solo un numero finito di valori. Tra le isometrie dello spazio euclideo tridimensionale, oltre alle rotazioni, si trovano anche le traslazioni, le riflessioni, e nuove operazioni che non esistono nel piano, come la glissorotazione.

Le simmetrie che permettono di pavimentare lo spazio in maniera regolare sono evidenti nei cristalli, configurazioni di atomi che si riproducono con una certa periodicità nello spazio. Abbiamo visto che esistono diciassette gruppi di simmetria nel piano; nello spazio euclideo tridimensionale se ne contano duecentotrenta. Ciò implica che le migliaia di cristalli differenti presenti in natura, o che possono essere sintetizzati in laboratorio, hanno una struttura che si riduce all'uno o all'altro di questi duecentotrenta gruppi, detti per questa ragione "cristallografici".

Non si trovano mai forme pentagonali nei cristalli. Esistono tuttavia delle leghe di alluminio e manganese che possiedono simmetrie pentagonali, senza che si possa pavimentare lo spazio in maniera regolare. Questi "quasi cristalli", dalle proprietà speciali, sono oggetto di intense ricerche, sia teoriche sia tecnologiche.

Il primo cristallografo della storia fu Johannes Kepler (Ke-

plero). In un meraviglioso trattatello del 1610, *Strena*,[3] prese in considerazione la forma esagonale dei fiocchi di neve e la collegò a quella di certi cristalli. A simili conclusioni lo portarono ragionamenti geometrici seminali, come per esempio quello sulla possibilità di impilare solidi regolari nel modo più compatto possibile. La natura realizza cose di questo genere: i semi di melagrana, di forma romboedrica, occupano il minor spazio possibile entro il frutto, e gli alveari delle api hanno una forma esagonale che permette di contenere la maggiore quantità di miele possibile. Keplero intravvide soprattutto i sottostanti principi di simmetria che presiedono all'ordinamento del mondo, su tutte le scale di grandezza, dai cristalli fino alle orbite dei pianeti e all'intero cosmo. Mistico per temperamento, Keplero credeva che la simmetria geometrica costituisse la lingua naturale con cui Dio si era espresso nella Creazione.

La simmetria è così presente intorno a noi che è difficile non pensare, sulla scia di Keplero, che essa abbia una posizione importante nella spiegazione del mondo. Nell'Antichità Platone era stato il primo a voler applicare principi generali di simmetria per descrivere l'organizzazione generale del cosmo, la sua forma e il suo contenuto. Aveva eletto la sfera, figura simmetrica per eccellenza, a simbolo dell'architettura cosmica che riteneva riflettesse la perfezione e l'immutabilità divine. Per completare tale geometrizzazione del mondo il filosofo ateniese scelse di rappresentare gli elementi (terra, acqua, aria e fuoco) con figure simmetriche. Ricorse ai poliedri regolari, meno "perfetti" della sfera, poiché gli elementi sono soggetti alla corruzione, all'alterazione e al cambiamento.

Nulla pare fondamentalmente cambiato nella fisica contemporanea. I fisici geometri odierni indagano le simmetrie della natura per accordarvi le proprietà strutturali della materia (il verbo "accordare" evoca, peraltro, l'armonia musicale). Sono sempre convinti che il modo in cui si esprimono i diversi feno-

3. J. Kepler, *Strena seu De niue sexangula*, Francofurti ad Moenum: apud Godefridum Tampach, 1611.

meni fisici e le proprietà della materia possa essere messo in corrispondenza con simmetrie geometriche. La differenza è che le simmetrie cercate oggi sono molto più sottili dell'invarianza per traslazione o per rotazione, le sole conosciute dagli Antichi.

La comprensione del ruolo della simmetria in fisica è cresciuta grazie ai lavori di Évariste Galois (1832) e di Emmy Noether (1916). Quest'ultima ha mostrato come le leggi di conservazione di certe quantità fisiche siano legate a simmetrie geometriche. Per esempio, il principio di conservazione dell'energia è una conseguenza del fatto che, quando si esaminano frammenti di materia in tempi differenti, essi conservano esattamente la stessa energia – proprio come un cubo si conserva quando subisce una rotazione di 90 gradi. La differenza è che la simmetria messa in gioco dall'energia è una traslazione temporale invece di una rotazione spaziale. L'invarianza di un sistema materiale rispetto alla rotazione spaziale comporta la conservazione di un'altra quantità fisica, detta "momento cinetico". Ciò spiega perché una pattinatrice che gira su se stessa rallenti la sua velocità di rotazione aprendo le braccia (dal momento che la massa delle braccia si allontana dall'asse di rotazione, la velocità deve diminuire perché la quantità di moto angolare resti costante) e giri più veloce riportando le braccia vicino al tronco. Lo stesso vale per le pulsar, stelle che hanno notevolmente aumentato la loro velocità di rotazione iniziale contraendosi in se stesse.

La nozione di simmetria e quella di gruppo di trasformazioni che lasciano invariato un oggetto, si tratti di una figura geometrica, di un corpo materiale o di un oggetto concettuale, hanno trovato applicazione alla stessa struttura dello spaziotempo. Il principio di relatività dichiara che le leggi della natura hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Nella meccanica di Galileo e nella relatività ristretta di Einstein i sistemi di riferimento inerziali sono in traslazione uniforme gli uni rispetto agli altri; nella relatività generale i sistemi "inerziali" sono quelli in caduta libera in un campo gravitazionale. Le operazioni geometriche che permettono di cal-

colare posizioni, tempi, velocità, ecc., passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro sono equivalenti a simmetrie. Queste formano un gruppo: il gruppo di relatività. La simmetria appare così onnipresente: in meccanica classica, con il gruppo di Galileo, nel quale, per esempio, le velocità si addizionano; in meccanica relativistica, con il gruppo detto di Poincaré.

Dopo la relatività, la simmetria si è estesa anche alla meccanica quantistica e alla fisica delle particelle. I fisici ne fanno uso per classificare le particelle elementari e comprendere la natura delle interazioni fondamentali, mediante simmetrie dette "di *gauge*" (alla lettera, "di calibro"). Le teorie di gauge sono state coronate da grande successo, poiché particelle predette con l'ausilio di tali concetti sono state poi rilevate effettivamente in laboratorio.

La simmetria attraversa oggi l'intero campo della fisica, al punto da diventarne il pilastro portante. Da trent'anni a questa parte i ricercatori tentano di unificare le forze e le particelle che costituiscono il nostro universo materiale, ossia di trovare loro una descrizione matematica comune. Siffatta "superteoria" renderebbe conto non solo di tutte le forme conosciute o sconosciute di materia, ma anche delle quattro interazioni fondamentali: la gravità, l'elettromagnetismo, le interazioni nucleari deboli e forti. Ve ne sono parecchie di "teorie unificate": Grande Unificazione, supersimmetria, superstringhe, ecc.; tutte hanno in comune l'ipotesi base che la natura operi secondo un insieme di regole matematiche che si riducono a simmetrie.

Benché siano attualmente nascoste nel nostro Universo a bassa energia, le simmetrie della natura potrebbero rivelarsi ad altissima temperatura ed essere studiate negli acceleratori di particelle.

Il vero scopo delle "teorie unificate" è doppio: si tratta non soltanto di scoprire le simmetrie sottostanti dell'Universo primordiale (ad altissima temperatura), ma anche di trovare meccanismi fisici capaci di rompere queste simmetrie quando,

nel corso della sua espansione, l'Universo è sceso a bassa energia. Dopotutto, viviamo in un Universo divenuto complesso, pieno di particelle e di interazioni così diverse che mal si prestano a una descrizione troppo simmetrica. La complessità del mondo può dunque tradursi in *scarti* dalla perfetta simmetria. La fisica studia così le "rotture di simmetria" e mostra come queste svolgano in natura un ruolo altrettanto fondamentale delle simmetrie.

È degno di nota come un cammino analogo si ritrovi nell'arte e nell'estetica. La simmetria è anche qui onnipresente, ma la nozione (soggettiva) di "bellezza" è legata più a un lieve scarto dalla simmetria che alla simmetria perfetta. I ritratti più belli non sono mai esattamente simmetrici, le architetture più affascinanti mescolano simmetria e sorpresa...

LETTURA CONSIGLIATA

H. WEYL, *La simmetria*, tr. it. Feltrinelli, Milano 1962.

41

I POLIEDRI

> A vent'anni, apprendendo che esistono solo cinque poliedri regolari perfetti che possono essere inscritti in una sfera, cinque e non di più, mi sono detto che l'universo non può che essere limitato.
>
> SALVADOR DALÍ

Un poliedro regolare è una figura spaziale le cui facce sono poligoni regolari e identici, ed è fatta in maniera tale che ciascuno spigolo è comune a due facce, e a due soltanto. Una formica che volesse passare da una faccia all'altra dovrebbe attraversare un unico spigolo; è vietata qualunque scorciatoia all'interno del poliedro.

In tutto vi sono soltanto cinque poliedri regolari. Eccoli:

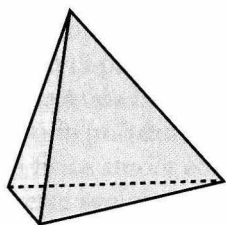
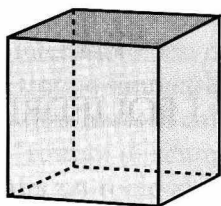
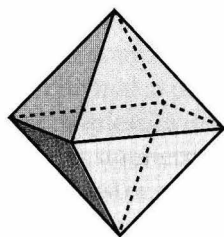
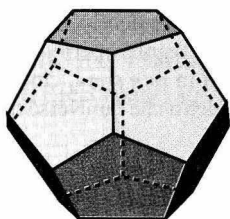
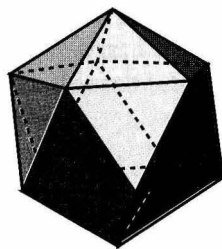
– il tetraedro, più comunemente chiamato piramide, le cui quattro facce sono triangoli equilateri;

– l'esaedro, più comunemente chiamato cubo, le cui sei facce sono quadrati;

– l'ottaedro, le cui otto facce sono triangoli equilateri;

– l'icosaedro, le cui venti facce sono triangoli equilateri;

– il dodecaedro, le cui dodici facce sono pentagoni.

I cinque poliedri regolari sono noti sin dall'Antichità. Studiati da Teeteto e poi da Platone, trovano il loro coronamento negli *Elementi* di Euclide. Lo scolio del teorema 18 del XIII (e ultimo) libro dimostra perché non possano esistere più di cinque poliedri regolari.

41.1 I cinque poliedri regolari

I poliedri regolari, impiegati a suo tempo da Platone per geometrizzare gli "elementi", servono al giorno d'oggi per rappresentare certi spazi multiconnessi, a condizione di considerare le facce identificate a coppie da determinate trasformazioni geometriche.

Platone, che sulla porta della sua scuola filosofica, l'Accademia, aveva fatto incidere "Non entri chi non conosce la geometria", li utilizza per descrivere i corpi semplici (terra, acqua, aria, fuoco) in termini di geometria pura – da cui il nome di "corpi" o "solidi platonici" sovente attribuito ai poliedri regolari. [► **p. 337, La simmetria; p. 189, Una breve storia dello spazio**]

La terra è associata al cubo, l'acqua all'icosaedro, l'aria all'ottaedro, il fuoco al tetraedro. L'argomentazione di Platone è piuttosto raffinata. Per esempio, una pietra di forma cubica è più difficile da mettere in movimento di una pietra avente qualsiasi altra forma poliedrica. Di conseguenza, il cubo è la figura più pesante e inerte e, per questo motivo, deve essere associata all'elemento terra. L'icosaedro, invece, deve essere

associato all'acqua poiché tra i poliedri è quello che possiede il maggior numero di facce: in ciascun vertice si incontrano cinque triangoli, e ciò rende la sua struttura relativamente rotonda e fluida. E così via, per gli altri elementi.

Quanto al quinto poliedro regolare, il dodecaedro, Platone e Aristotele se ne sono serviti per chiudere la rappresentazione geometrica del mondo, mettendolo in corrispondenza con un quinto elemento: appunto, la quintessenza.[1] Con le sue dodici facce pentagonali, il dodecaedro è la figura che più si avvicina a una sfera, la cui perfetta rotondità simbolizza la perfezione dei cieli.

Stando a Giamblico, il primo a costruire la figura del dodecaedro sarebbe stato il pitagorico Ippaso di Metaponto. Nella sua *Vita di Pitagora* Giamblico racconta che per aver reso pubblico lo scritto, in cui indicava come costruire una sfera quasi perfetta a partire da dodici pentagoni, Ippaso venne accusato di empietà, poi gettato in mare. Sempre Giamblico ci dice che il filosofo di Metaponto aveva menato vanto di una scoperta il cui merito risaliva all'unico sommo maestro, Pitagora! Quest'ultimo sarebbe rimasto affascinato dalla forma dei cristalli di pirite, assai diffusi dove viveva. La pirite presenta dodici facce pentagonali leggermente irregolari, e tale forma aveva spinto Pitagora a interessarsi alla sezione aurea, che si ricava dalla costruzione dei poligoni regolari. Da allora, il dodecaedro ha assunto una forte valenza simbolica. Il numero 5 associato al numero di lati delle sue facce pentagonali ha un ruolo particolare nell'occultismo: il pentacolo o stella a cinque punte, all'interno del quale sono iscritte lettere, parole, segni, è ritenuto tradurre una struttura universale. Il numero 12, quante sono le facce del dodecaedro, rende naturale la corrispondenza con i dodici segni dello Zodiaco, i dodici mesi dell'anno, i dodici apostoli, ecc. Sono stati ritrovati artefatti umani a forma dodecaedrica, di origine celtico-romana.

1. Nell'*Epimonide*, un testo successivo al *Timeo*, Platone la chiamerà *etere*: l'etimologia di questo termine significa "corre sempre", come le regioni del cielo.

Numerosi sono gli artisti che hanno disegnato poliedri: Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Dürer, Escher (il fratello del quale fu professore di cristallografia all'Università di Leida). Per venire più vicino a noi, come non ricordare l'impressionante *Cena* dipinta da Salvador Dalí, con la sua sala di forma dodecaedrica, circondata da grandi vetrate pentagonali. Ma è soprattutto in cosmologia, in cristallografia e in topologia che i poligoni hanno dato prova del loro potenziale esplicativo.

Nel 1596, nel suo *Mysterium Cosmographicum*, Keplero si era interessato ai poliedri regolari per risolvere in maniera originale il problema del rapporto tra le orbite dei pianeti. A suo dire, i cinque solidi platonici dovevano corrispondere esattamente ai cinque intervalli tra i sei pianeti allora conosciuti: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno. Keplero mostrò matematicamente che i solidi platonici erano concatenati l'uno all'altro in un unico modo, secondo un'architettura che riproduceva quella del Sistema solare.

Quando, in seguito ai nuovi dati astronomici forniti da Tycho Brahe, dovette abbandonare questo modello, descrivendo la forma delle orbite dei pianeti in termini di ellissi, Keplero non smise comunque di lasciarsi affascinare da quelle figure così perfette. Studiò dapprima i poliedri convessi semiregolari, detti archimedei perché indagati per la prima volta dal grande geometra di Siracusa (romboidi, prismi, antiprismi, ecc.). In un secondo momento, abbandonata l'ipotesi di convessità, costruì i primi poliedri "a stella", costituiti dall'assemblaggio di stelle a molte punte. Li utilizzò per modellizzare la struttura dei cristalli di neve e gettare le basi della cristallografia.[2] [▶ **p. 337, La simmetria**]

I poliedri, regolari o meno, hanno avuto infine un ruolo essenziale nello sviluppo della topologia. Nel 1750, in una lettera indirizzata a Christian Goldbach, Leonhard Euler (Eulero)

2. Nel 1809 il matematico Louis Poinsot, che ignorava i risultati di Keplero, riscoprì i poliedri a stella e ne fece una classificazione completa. Il lettore che fosse affascinato dai poliedri potrà consultare in rete un sito notevole: http://bib1.ulb.ac.be/coursmath/poly.htm.

menzionò un certo numero di proprietà generali dei poliedri. Tra queste, una formula all'apparenza semplicissima, ma destinata a rivelarsi in seguito di una notevole profondità:

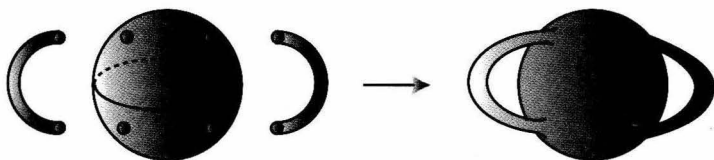
$$F - S + V = 2$$

dove F è il numero delle facce, S il numero degli spigoli e V il numero dei vertici del poliedro.

Per esempio, un cubo possiede 6 facce, 12 spigoli e 8 vertici. Non è difficile vedere che 6 –12 + 8 = 2. Lo stesso dicasi per tutti gli altri poliedri regolari: il tetraedro (4, 6, 4), l'ottaedro (8, 12, 6), il dodecaedro (12, 30, 20) e l'icosaedro (20, 30, 12). Ma la formula vale per qualunque tipo di poliedro, indipendentemente dalla sua forma o dalla sua taglia! Dopo la soluzione del problema dei ponti di Königsberg, Eulero segnava così una nuova tappa nella progressiva emancipazione della geometria dalla nozione di distanza. [▶ **p. 79, Conoscenza dei luoghi**]

Che cosa accade se si fanno uno o più buchi in un poliedro? Dopo aver a lungo riflettuto su questo apparentemente bizzarro quesito, Simon Lhuilier dimostrò nel 1813 che la formula di Eulero poteva essere generalizzata a qualsiasi figura poliedrica, bucata o meno:

$$F - S + V = 2 - 2T$$

dove T è il numero dei buchi. Anche il numero di Lhuilier è un invariante topologico, indipendente dalla taglia del poliedro. Può essere definito per qualsivoglia superficie chiusa, ed è per questo chiamato "genere". Il genere del toro è 1, quello di una sfera è 0, quello di una sfera munita di T manici è T.

41.2 La sfera a manici

La formula di Eulero-Lhuilier si applica a tutte le superficie chiuse di genere T, equivalenti a una sfera munita di T manici.

Un altro invariante topologico è il numero delle dimensioni dello spazio. È solo in spazi a tre dimensioni che il numero dei poliedri regolari è uguale a 5. Nel piano bidimensionale si possono evidentemente costruire quanti "poliedri" (ossia poligoni) regolari si vuole, basta soltanto aumentare il numero dei lati.

I matematici, curiosi come sempre, si sono ingegnati a vedere cosa diventino i poliedri regolari in spazi di dimensione superiore. Hanno trovato, per esempio, che, in uno spazio di dimensione 4, è possibile costruire sei poliedri regolari; uno di questi, chiamato "ipercubo", è una figura solida delimitata da otto cubi, nello stesso modo in cui nello spazio ordinario un cubo è delimitato da sei facce. In dimensione 5 si può immaginare l'ultracubo, delimitato questa volta da un ipercubo su ciascuna delle sue dieci facce! Ma anche il più talentuoso tra i geometri che vivesse in un universo a cinque dimensioni non potrebbe mai assemblare più di tre poliedri regolari: l'icosaedro e il dodecaedro non hanno alcun equivalente nello spazio a cinque dimensioni.

Il numero dei poliedri regolari rappresenta così una caratteristica della dimensionalità dello spazio nel quale tali poliedri sono immersi. Alcuni vedono in tutto ciò una dimostrazione della natura tridimensionale del nostro spazio, poiché nello spazio reale i cinque poliedri regolari possono effettivamente essere costruiti in pietra, in legno o in carta!

42

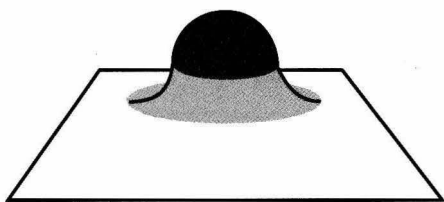
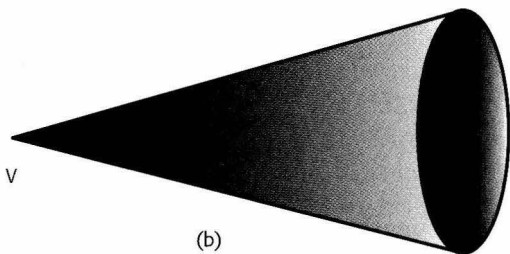
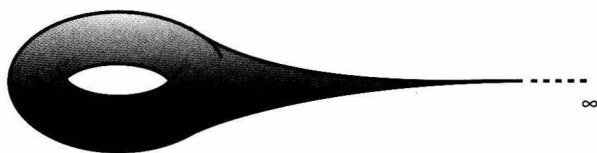
CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE

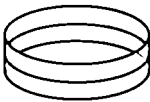
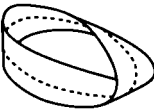
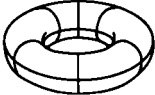
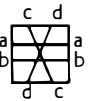
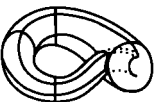
Parlo a ciò che tace
Sotto la superficie
MICHEL CASSÉ

Chiamerò qui "superficie" uno spazio a due dimensioni che non ha bordo. Un disco o un quadrato, che hanno un bordo, non sono superficie, stando a questa definizione. In generale, una superficie possiede una curvatura variabile da un punto all'altro (figura 42.1). Quando non ha punti cuspidali, ossia punti in cui la curvatura diviene infinita, una superficie gode della proprietà di poter essere resa omogenea. Ciò significa che un opportuno cambiamento di coordinate trasforma la sua metrica a curvatura variabile in una metrica a curvatura costante.

La classificazione completa delle superficie che possono essere rese omogenee si riduce pertanto alla classificazione delle superficie a curvatura costante. Tre sono i casi da considerare: le superficie euclidee (curvatura nulla), le superficie sferiche (curvatura positiva), le superficie iperboliche (curvatura negativa).

Superficie euclidee

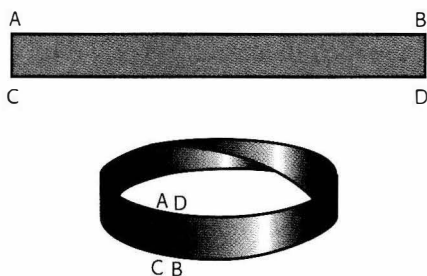
Una sola tra le superficie euclidee è monoconnessa: l'usuale piano $\mathbf{E}^2$. Le altre, multiconnesse, sono caratterizzate dal loro poligono fondamentale e dal loro gruppo di olonomia. Il poligono fondamentale può essere o un "digono" (un poligo-

42.1 Tre superficie a curvatura variabile

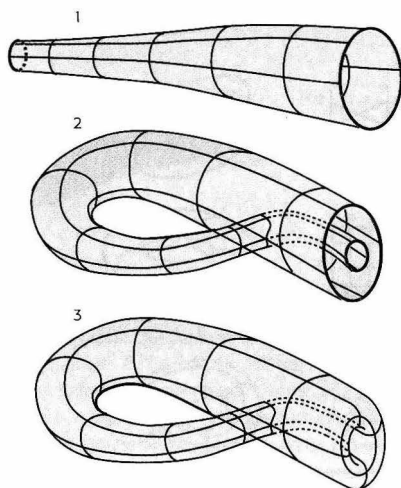
(a) **Superficie a curvatura variabile che può essere resa omogenea**
Un piano munito di una gibbosità è suddiviso in tre regioni, una di curvatura nulla (in bianco), una di curvatura negativa (in grigio chiaro) e un'altra di curvatura positiva (in grigio scuro). È possibile stirare in maniera continua questa superficie in modo da appiattirla completamente, ossia da conferirle una metrica a curvatura ovunque nulla. In un certo senso, in un piano gibboso le regioni a curvatura positiva compensano quelle a curvatura negativa.
(b) **Superficie conica**
Questa superficie ha una curvatura ovunque nulla, eccetto che in un punto (il vertice *V* del cono), in cui la curvatura è infinita. Non può essere resa omogenea.
(c) **Superficie a punto cuspidale**
Questa superficie "pressoché torica", benché d'area finita, possiede un punto cuspidale all'infinito. Non può essere resa omogenea.

no a due lati che si congiungono solo all'infinito, ossia una banda a bordi paralleli di altezza infinita) o un quadrilatero o un esagono. Quanto alle olonomie (identificazioni possibili di punti), esse sono o traslazioni o glissoriflessioni. Il numero di combinazioni differenti risulta assai ridotto: in tutto vi sono quattro superficie euclidee multiconnesse (figura 42.2).

È facile ottenere sezioni finite del cilindro o del nastro di Möbius (figura 42.3) a partire da un foglio di carta. Invece, è impossibile, persino con un materiale elastico, costruire un toro euclideo $\mathbf{T}^2$ o un otre di Klein $\mathbf{K}^2$ (figura 42.4). [▶ **p. 85, Dal cilindro alla dambella**]

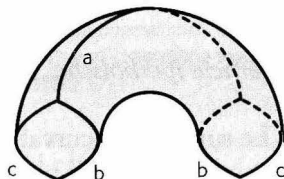
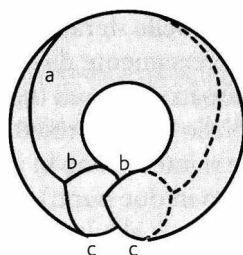
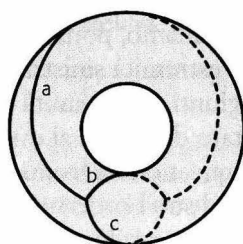
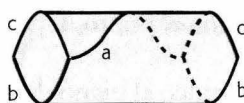
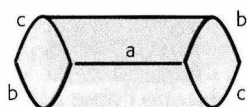
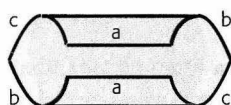
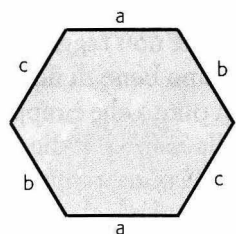
nome	poligono fondamentale e identificazioni	forma	chiuso	orientabile
cilindro	a b a b		NO	SÌ
nastro di Möbius	a b b a		NO	NO
toro	c d a b a b c d		SÌ	SÌ
otre di Klein	c d a b a b d c		SÌ	NO

42.2 Le quattro superficie euclidee multiconnesse

La seconda colonna indica la forma del poligono fondamentale e le possibili identificazioni di punti; la quarta colonna indica il carattere chiuso (area finita) o aperto (area infinita) della superficie; l'ultima colonna la sua proprietà di essere orientabile o no. Quando il poligono fondamentale è un digono (cilindro, nastro di Möbius), la superficie è aperta; altrimenti, è chiusa.

42.3 Costruzione di un nastro di Möbius

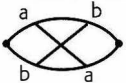
La banda di Möbius è di lunghezza infinita, ma se ne può prelevare una sezione di larghezza finita chiamata "nastro di Möbius". Scoperto nel 1858 da Johann Benedict Listing e, indipendentemente, da August Ferdinand Möbius nel 1865, il nastro ormai detto di Möbius può essere facilmente costruito nello spazio a 3 dimensioni: basta ritagliare una lunga banda di carta e torcere di mezzo giro una delle estremità prima di incollarla all'altra. Il nastro di Möbius non è una superficie orientabile; in altri termini, non potremmo dipingere ciascuna delle sue facce con un colore differente, dal momento che essa è una superficie unilatera, cioè ha una sola faccia.

42.4 Costruzione idealizzata dell'otre di Klein

L'otre di Klein (scoperto nel 1882) verrebbe ottenuto a partire da una comune bottiglia qualora le si allungasse il collo, lo si piegasse, gli si facesse attraversare la superficie (il che rende la costruzione fisicamente irrealizzabile) e infine lo si raccordasse all'interno con il fondo. Al pari del nastro di Möbius, questa superficie non è orientabile.

Il toro piatto $\mathbf{T}^2$ può alternativamente essere ottenuto identificando i lati paralleli di un quadrato o di un esagono regolare (figura 42.5). Queste due descrizioni equivalenti sono intimamente legate alle due possibilità di pavimentazione del piano euclideo con quadrati e con esagoni. [▸ **p. 337, La simmetria**]

42.5 Costruzione di un toro piatto a partire da un esagono

Superficie sferiche

Tra gli spazi a due dimensioni a curvatura positiva soltanto la sfera $\mathbf{S}^2$ è monoconnessa. Dal punto di vista topologico, essa è rappresentabile da un digono chiuso (figura 42.6). Questa mappa dello spazio sferico ci è familiare grazie ai mappamondi. Se seguiamo su un mappamondo un giro del mondo a vela, ci allontaniamo, poniamo, verso ovest fino a che non raggiungiamo l'estremità sinistra della mappa; sappiamo bene di non esser giunti all'estremità della Terra, ma a un punto che è rappresentato due volte ai due bordi opposti della mappa. Il digono, dunque, non ha frontiera, dal momento che i punti rappresentati sul suo bordo non si distinguono in nulla dagli altri punti.

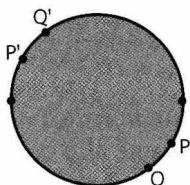
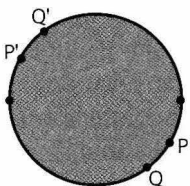
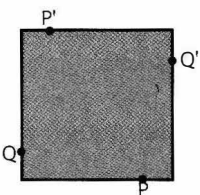
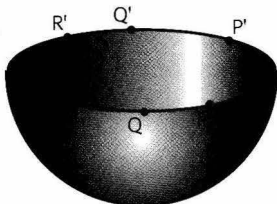
Vi è una sola variante multiconnessa dello spazio sferico: il piano proiettivo (detto anche ellittico) $\mathbf{P}^2$. Si ottiene identificando a due a due i punti diametralmente opposti della sfera. Al pari della sfera, il piano proiettivo è finito e non ha frontiera; diversamente da essa, non è orientabile. $\mathbf{P}^2$ può essere costruito in vari modi (figura 42.7).

Nello spazio proiettivo una retta è una linea chiusa, ma due rette si intersecano in un solo punto (mentre sulla sfera si intersecano in due punti). Facendo il giro di una delle rette si passa da un lato all'altro della prima, senza incontrarla. La retta, dunque, è una linea chiusa che non separa il piano proiettivo.

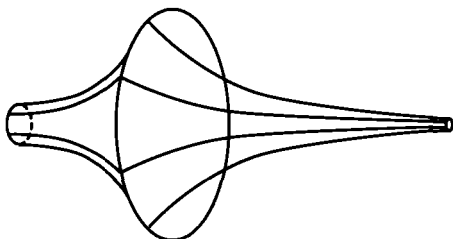
Superficie iperboliche

Le superficie a curvatura negativa ammettono come prototipo monoconnesso il piano iperbolico (o piano di Lobačevskij) $\mathbf{H}^2$. Come il piano euclideo, il piano di Lobačevskij è una superficie aperta: se ci si sposta in linea retta seguendo i contorni della superficie, si ritorna al punto di partenza; ci si allontana, però, all'infinito.

Se si aggiunge un manico al piano di Lobačevskij, si ottiene una nuova superficie iperbolica aperta, ma multiconnesssa. Si possono anche costruire superficie iperboliche multiconnesse

sfera $\mathbf{S}^2$		monoconnessa	chiusa	orientabile
piano proiettivo $\mathbf{P}^2$	a b b a	multiconnessa	chiuso	non orientabile

42.6 Le due superficie di curvatura costante positiva

(a) Se gli antipodi P e P' (punti diametralmente opposti sulla sfera) sono considerati un solo e medesimo punto, si ottiene il piano proiettivo, munito di una geometria ellittica.

(b) Il poligono fondamentale del piano proiettivo è un digono chiuso – per esempio, due semicerchi uniti, i cui punti diametralmente opposti sono identificati.

(c) Una rappresentazione equivalente è quella di un quadrilatero i cui lati opposti sono identificati tramite due rototraslazioni (traslazione seguita da una rotazione di 180°).

(d) Il piano proiettivo è rappresentato anche da una semisfera. I punti P, Q, R, sono identificati coi punti P', Q', R'.

42.7 Differenti costruzioni del piano proiettivo

42.8 La pseudo-sfera

Questa superficie, detta anche trattoide, è un modello del piano iperbolico di Lobačevskij: ha una curvatura costante negativa, e in essa esiste un'infinità di parallele a una "retta" data.

chiuse, partendo da un poligono fondamentale avente almeno otto lati, e identificando i lati a coppie, grazie alle olonomie che formano un sottoinsieme delle trasformazioni che lasciano invariato il piano iperbolico. Poiché un poligono regolare può avere un numero arbitrariamente grande di lati, ne segue immediatamente che esiste un numero infinito di superficie iperboliche chiuse: le ciambelle. La più semplice delle ciambelle iperboliche è il doppio toro; ha due buchi e la sua topologia è rappresentata da un ottagono o dalla somma connessa di due tori $\mathbf{T}^2$ # $\mathbf{T}^2$ (dove il simbolo # indica appunto la somma connessa). Più in generale, lo n-toro – somma connessa di n tori – è una ciambella iperbolica a n buchi, rappresentabile da un poligono a $4n$ lati. [▶ **p. 85, Dal cilindro alla ciambella**]

Ecco dunque classificate tutte le superficie omogenee. Cinque sono euclidee, due sono sferiche e tutte le altre, di numero infinito, sono iperboliche.

Se si è interessati soltanto alle superficie chiuse, la classificazione è ancor più semplice; si riduce a un gioco simile al Lego, con tre elementi base: la sfera $\mathbf{S}^2$, il toro $\mathbf{T}^2$ e il piano proiettivo $\mathbf{P}^2$. Sommare due o più di questi elementi equivale a incastrare i pezzi del Lego. Per esempio, l'otre di Klein si riduce alla somma connessa di due piani proiettivi ($\mathbf{K}^2 = \mathbf{P}^2$ # $\mathbf{P}^2$). La sfera ha un ruolo particolare, quello di elemento "neutro". Infatti, la somma connessa di due sfere è ancora una sfera ($\mathbf{S}^2$ # $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^2$); la

	0	**1**	**2**	**3**	**...**
0	S^2	P^2	$P^2 \# P^2$	$P^2 \# P^2 \# P^2$	...
1	T^2	$T^2 \# P^2$	$T^2 \# P^2 \# P^2$	$T^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$	...
2	$T^2 \# T^2$	$T^2 \# T^2 \# P^2$	$T^2 \# T^2 \# P^2 \# P^2$		...
3	$T^2 \# T^2 \# T^2$	$T^2 \# T^2 \# T^2 \# P^2$			
...	...	...	...	...	...

42.9 Costruzione delle superficie chiuse

La prima riga indica il numero dei piani proiettivi e la prima colonna il numero dei tori che partecipano alla costruzione della superficie.

curvatura positiva	S^2	P^2	
curvatura nulla		$P^2 \# P^2$	T^2
curvatura negativa		$P^2 \# P^2 \# P^2$	$T^2 \# T^2$
		$P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$	$T^2 \# T^2 \# T^2$
		...	...

42.10 Classificazione completa delle superficie chiuse

somma connessa di una sfera e di un toro resta un toro ($\mathbf{S^2 \# T^2 = T^2}$), ecc. La tabella 42.9 riporta la lista di tutte le superficie chiuse possibili, ottenute combinando il numero di piani proiettivi e il numero di tori che partecipano alla loro costruzione.

Questa lista, però, è ridondante, poiché, a eccezione degli elementi della prima colonna e della prima riga, non contiene che doppioni; per esempio, $\mathbf{T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2}$.

Una lista completa e senza doppioni di tutte le superficie chiuse si riduce alla fine a:

- la sfera;
- il piano proiettivo;
- il toro;
- tutte le somme connesse di piani proiettivi;
- tutte le somme connesse di tori.

LETTURA CONSIGLIATA

J. WEEKS, *The Shape of Space*, Dekker, New York 1985.

43

CLASSIFICAZIONE DEGLI SPAZI TRIDIMENSIONALI

Bevi l'ardente nettare che colma
gli spazi trasparenti puro.

CHARLES BAUDELAIRE

Il passaggio dalla dimensione 2 (classificazione delle superficie) alla dimensione 3 (classificazione degli spazi che possono servire da modelli geometrici allo spazio fisico) non si riduce a una semplice generalizzazione, ma si traduce nella comparsa di proprietà radicalmente nuove. Abbiamo visto che ogni superficie regolare può essere resa omogenea, sì da essere descritta da una metrica a curvatura costante. [▶ **p. 355, Classificazione delle superficie**]. Ciò significa che vi sono solo tre prototipi di superficie monoconnesse (facenti funzione di ricoprimento universale) cui tutte le superficie sono necessariamente ricondotte. Lo stesso non vale per gli spazi tridimensionali: esistono *otto* spazi possibili di ricoprimento universale. Soltanto tre di essi sono omogenei e isotropi, mentre gli altri cinque sono omogenei ma non isotropi, nel senso che in un dato punto la misura della curvatura dipende dalla direzione. [▶ **p. 55, Dalla relatività al Big Bang**]

I *cilindri tridimensionali* ne sono un esempio relativamente semplice. Sappiamo che l'usuale cilindro può essere considerato come la "moltiplicazione" $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{E}$ di un cerchio $\mathbf{S}^1$ e di una retta **E** (se si fa scorrere un cerchio lungo una retta perpendicolare al suo centro, si genera un cilindro); analogamente, il "cilindro tridimensionale sferico" può essere visto come la

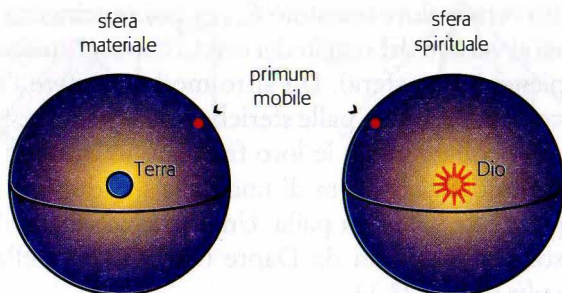
moltiplicazione $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}$ di una sfera $\mathbf{S}^2$ e di una retta **E**. Tuttavia, mentre la superficie cilindrica poteva essere descritta dalla metrica del piano euclideo $\mathbf{E}^2$, lo spazio cilindrico sferico è fondamentalmente distinto dallo spazio euclideo $\mathbf{E}^3$. Allo stesso modo, lo "spazio cilindrico iperbolico" $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}$, ottenuto impilando i piani di Lobačevskij, è fondamentalmente distinto da $\mathbf{E}^3$.

Poiché scopo di *questo volume* è applicare la teoria matematica degli spazi alla descrizione dell'universo fisico, che appare notevolmente isotropo, mi atterrò qui (e in maniera alquanto succinta, vista la complessità dell'argomento) alla classificazione degli spazi omogenei e isotropi. Essi soli sono suscettibili di descrivere la geometria spaziale dei modelli del Big Bang. Sono tutti riconducibili a tre spazi di ricoprimento universale a curvatura costante: $\mathbf{S}^3$ (curvatura positiva), $\mathbf{E}^3$ (curvatura nulla), $\mathbf{H}^3$ (curvatura negativa).

Spazi euclidei (curvatura nulla)

Lo spazio euclideo monoconnesso $\mathbf{E}^3$, a curvatura ovunque nulla, è infinito in tutte le direzioni. Le varianti multiconnesse sono caratterizzate dal loro poliedro fondamentale e dal loro gruppo di olonomia. Il poliedro fondamentale è o un parallelepipedo o un prisma a base esagonale (corrispondentemente ai due modi di pavimentare lo spazio euclideo; vedi figura 14.3). Le olonomie (identificazioni possibili di punti) sono traslazioni, glissoriflessioni o glissorotazioni (composizioni di una rotazione con una traslazione parallela all'asse di rotazione). Il numero di composizioni differenti si riduce a diciotto spazi euclidei.

Otto di essi sono aperti (di volume infinito). Uno di questi è lo spazio euclideo a un buco, generato dallo scorrimento di un toro lungo una retta: $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{E}$.

Gli altri dieci spazi sono chiusi (di volume finito). Sei di questi sono orientabili. E sono proprio questi sei spazi a risultare di peculiare interesse per la cosmologia, giacché possono

43.1 L'ipersfera di Dante

Secondo Dante il cosmo è diviso in due sfere, la sfera materiale e la sfera spirituale. La prima parte dal centro della Terra e si eleva progressivamente attraverso le sfere successive della Luna, del Sole, dei pianeti e delle stelle fisse. Al di là di questa sfera del mondo visibile ve ne è un'altra, l'Empireo, dimora degli angeli che gravitano come pianeti intorno a un centro divino. L'autore della *Divina Commedia* spiega come veda simultaneamente sulla superficie sferica dell'universo materiale (il *primum mobile*) un punto della sfera corrispondente nell'universo spirituale. Il cosmo di Dante coinciderebbe dunque con l'ipersfera di Riemann S^3.

modellizzare perfettamente la parte spaziale degli universi di Einstein-de Sitter. [**La matematica cosmica, p. 263 ►**] In particolare, spicca l'ipertoro $\mathbf{T}^3$, costruito identificando per traslazioni le facce opposte di un parallelepipedo. [**► p. 99, Forme affascinanti**]

La figura 14.4 indica il loro poliedro fondamentale e il modo in cui le facce del poliedro devono essere incollate.

Spazi sferici (curvatura positiva)

Lo spazio sferico monoconnesso, $\mathbf{S}^3$, a curvatura positiva, è l'ipersfera. Einstein ha cercato di dare un'immagine intuitiva di un tale spazio a tre dimensioni finito e tuttavia illimitato, che richiede alla nostra mente un po' di esercizio per diventare familiare.

Vi sono più modi di visualizzare l'ipersfera. Uno di questi consiste nell'immaginare i punti dell'ipersfera come quelli di una famiglia di sfere bidimensionali, il cui raggio cresce da 0

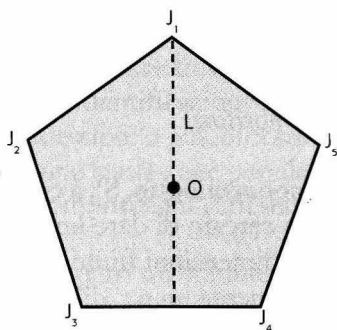
fino a un certo valore massimo R, per poi restringersi da R a 0 (si pensi al variare del raggio dei cerchi che costituiscono le sezioni piane di una sfera). Un altro modo è vedere l'ipersfera come composta da due palle sferiche immerse nello spazio euclideo, e incollate lungo le loro frontiere in maniera che ciascun punto della frontiera di una palla sia identico al punto corrispondente sull'altra palla. Una costruzione simile a questa è stata immaginata da Dante (1265-1321) nella *Divina Commedia* (figura 43.1).

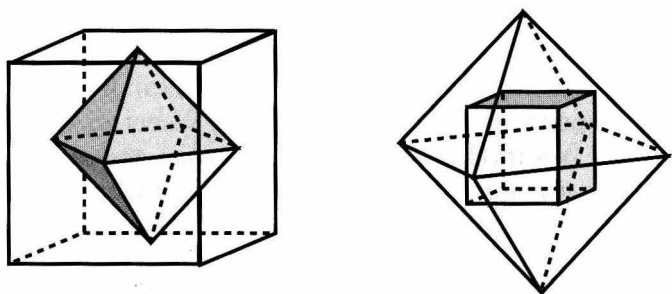
Oltre allo spazio sferico monoconnesso vi è una serie infinita di spazi sferici multiconnessi, *tutti chiusi* (di volume finito) *e orientabili*. Lo spazio proiettivo P^3, ottenuto identificando i punti antipodi dell'ipersfera, è il più semplice tra questi. [▶ **p. 99, Forme affascinanti; p. 371, *Topos e cosmos***]

Le olonomie che conservano la metrica dell'ipersfera appartengono a tre categorie:

– il gruppo ciclico, costituito da rotazioni d'angolo $2\pi/p$ intorno a un asse, dove p è un numero intero qualsiasi;

– il gruppo diedrico, che è il gruppo di simmetria di un poligono piano regolare a m lati (figura 43.2);

– i gruppi poliedrici, che conservano la forma dei poliedri regolari. Il gruppo T conserva il tetraedro, il gruppo O l'ottaedro e

43.2 Un gruppo diedrico

Il gruppo diedrico D_5 è costituito dalle rotazioni intorno alla linea L che lasciano invariato il pentagono $J_1 J_2 J_3 J_4 J_5$.

43.3 Dualità dei poliedri

Il cubo ha 6 facce e 8 vertici, l'ottaedro 8 facce e 6 vertici. Il cubo e l'ottaedro sono duali nel senso che i centri delle facce dell'uno diventano i vertici dell'altro, e viceversa. Analogamente, l'icosaedro (20 facce e 12 vertici) e il dodecaedro (12 facce e 20 vertici) sono duali.

il cubo, il gruppo *I* l'icosaedro e il dodecaedro. Esistono soltanto tre gruppi poliedrici distinti per tutti i cinque poliedri. Ciò dipende dal fatto che il cubo e l'ottaedro da una parte, l'icosaedro e il dodecaedro dall'altra, sono "duali" nel senso della figura 43.3. Di conseguenza, il loro gruppo di simmetria è lo stesso.

Se si identificano i punti dell'ipersfera tramite olonomie appartenenti a uno di questi gruppi, lo spazio che ne risulta è sferico e multiconnesso. Di tali spazi ve ne è un numero infinito, in virtù degli interi *p* e *m* che parametrizzano i gruppi ciclici e diedrici. Più *p* e *m* sono grandi, più è piccolo il volume degli spazi corrispondenti.

Tra tutti gli spazi sferici è particolarmente interessante per la cosmologia lo spazio di Poincaré (figura 14.7), il cui volume, centoventi volte più piccolo di quello dell'ipersfera, sarebbe all'origine di rilevanti miraggi topologici.

Spazi iperbolici (curvatura negativa)

Di tutti gli spazi iperbolici uno solo, indicato con $\mathbf{H}^3$, è monoconnesso. È l'analogo tridimensionale del piano di Lobačevskij $\mathbf{H}^2$, e si estende all'infinito in tutte le direzioni.

Non sussiste un teorema generale che permetta di classificare gli spazi tridimensionali iperbolici. Se ne conoscono degli esempi, alcuni aperti (infiniti), altri chiusi (finiti). Il corno iperbolico è aperto, gli spazi di Best, di Seifert-Weber, di Weeks sono chiusi. [▶ **p. 117, Piccoli universi bizzarri; p. 99, Forme affascinanti**]

Hanno tutti proprietà affascinanti e possono servire da modello geometrico per lo spazio fisico, qualora quest'ultimo risulti a curvatura negativa. La loro proprietà più rilevante dipende dal teorema di rigidità. In parole semplici, esso dice che, se si fissa una topologia iperbolica, vi è una sola metrica compatibile con tale topologia. Ne segue che il volume dello spazio è fissato dalla sua topologia – il che contrasta singolarmente con il caso euclideo, in cui si possono costruire ipertori grandi o piccoli a piacere (basta soltanto cambiare la taglia del parallelepipedo fondamentale).

Grazie al teorema di rigidità è possibile classificare per volume crescente gli spazi iperbolici chiusi, partendo dal più piccolo attualmente conosciuto, lo spazio di Weeks. [▶ **p. 99, Forme affascinanti**]

LETTURA CONSIGLIATA (a lettori esperti)

W. THURSTON, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton 1997.

44

TOPOS E *COSMOS*

> Dopo Newton gli scienziati seppero
> Rendere sempre più attraenti
> I grandi
> E piccoli spazi
>
> ANDRÉ VERDET

"Immaginate che dopo una serie di osservazioni astronomiche estremamente fini l'intero Universo ci appaia costituito da una moltitudine di coppie conformi della nostra Via Lattea, che lo spazio si riveli suddiviso in cubi contenenti ciascuno una coppia esattamente identica alla Via Lattea. Potremmo mai davvero credere che uno stesso mondo si ripeta indefinitamente? Per renderci conto dell'assurdità di questa idea ci basti pensare che, in tali condizioni, noi stessi, in quanto soggetti osservatori, esisteremmo in un numero infinito di esemplari identici. Sarebbe molto più rassicurante pensare che le ripetizioni sono illusorie, che in realtà lo spazio possiede proprietà di connessione particolari, tali che, se si esce da un lato di uno qualunque di questi cubi, vi si rientra immediatamente dal lato opposto."[1]

Questa descrizione, in cui il lettore avrà riconosciuto quella di uno spazio ipertorico, data ormai un secolo. Compare nel postscritto di un articolo pubblicato nel 1900 dall'astronomo

1. K. Schwarzschild, *Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 35, 1900, p. 337.

tedesco Karl Schwarzschild (figura 20.1). L'anticipazione è tanto più straordinaria in quanto all'inizio del Novecento le nebulose spirali non erano state ancora identificate come galassie intere e indipendenti, esterne alla nostra.

Schwarzschild era uno di quegli astronomi visionari dotati di una profonda cultura matematica. Dopo il lavoro fondamentale di Riemann, i matematici del XIX secolo avevano cominciato a scoprire esempi di spazi finiti ma illimitati. Tra questi vi era l'ipertoro, costituito da un solo blocco rettangolare di spazio euclideo riconnesso su se stesso, di modo che tutto quello che passa da una faccia riappare in un punto della faccia opposta. Ma agli occhi di quasi tutta la comunità scientifica tale spazio chiuso restava una pura astrazione, priva di alcun rapporto con lo spazio fisico. Schwarzschild fu il primo a pensarla diversamente, mescolando *topos* e *cosmos*, luogo e totalità.

Topos e *cosmos*[2] non si sono quasi mai felicemente sposati nella storia della cosmologia relativistica. Quando il padre della disciplina, Albert Einstein, introdusse nel suo modello cosmologico del 1917 uno spazio a curvatura positiva, l'ipersfera, aveva come motivazione principale quella di fornire un modello di spazio finito. Tale soluzione risolveva in maniera così ingegnosa i paradossi legati allo spazio newtoniano infinito che i cosmologi la accettarono rapidamente, trascurando le altre possibilità. Einstein era convinto che l'ipersfera fornisse non soltanto la metrica dello spazio, cioè le sue proprietà metriche locali, ma anche la sua struttura globale, ossia la sua topologia; per esempio, il fatto che il volume dello spazio fosse finito e uguale a $2\pi^2R^3$, dove R è il raggio dell'ipersfera. Le questioni pertinenti al volume, alla forma globale dello spazio, e più in generale al suo carattere finito o infinito, non riguardano soltanto la metrica. Dipendono anche dalla topologia. Richiedono, perciò, un approccio supplementare rispetto a quello della geometria differenziale riemanniana, che serve da supporto matematico alla relatività generale.

2. Si possono considerare questi termini come le abbreviazioni familiari di topologi e cosmologi!

La topologia non era tra le preoccupazioni principali di Einstein. In una lettera a Willem de Sitter del 12 marzo 1917 scrisse con sottile ironia: "L'Universo si estende all'infinito? È finito e chiuso? A domande del genere ha risposto Heine in una delle sue poesie dicendo che solo gli imbecilli se le pongono". Nondimeno, Einstein pretese di dare una risposta definitiva a favore dell'Universo chiuso, con il suo modello dell'ipersfera.

Alcuni colleghi, più aggiornati circa lo sviluppo della topologia, gli fecero notare il carattere arbitrario della sua scelta. Willem de Sitter, per esempio, osservò che la soluzione cosmologica di Einstein ammetteva una forma differente di spazio sferico: lo spazio proiettivo, detto anche spazio ellittico, costruito a partire dall'ipersfera identificando a due a due tutti i punti situati agli antipodi l'uno dell'altro. Lo spazio ellittico ha la stessa metrica dell'ipersfera, ma una topologia differente; in particolare, ha un volume minore, pari alla metà. [▶ **p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali**]

Willem de Sitter privilegiò la topologia ellittica per un problema legato alla circumnavigazione della luce. I modelli di Einstein e di de Sitter, entrambi finiti, erano ugualmente supposti statici, ossia il loro raggio di curvatura restava fisso. In qualche miliardo d'anni, un raggio luminoso partito da una stella aveva il tempo di tornare al punto di partenza e generare una stella fantasma nella posizione in cui era la stella al momento dell'emissione.

Tale eventualità venne però considerata così paradossale che de Sitter e, dopo di lui, altri cosmologi, come Arthur Eddington, proposero di sostituire l'ipersfera con lo spazio ellittico per modellizzare lo spazio finito. Nello spazio sferico a ciascun punto corrisponde un solo punto antipode, analogamente alla coppia di poli Nord e Sud sulla superficie della Terra. Nello spazio ellittico la topologia è tale che la distanza massima da un punto dato non corrisponde più a un punto unico situato all'antipode, bensì a un'infinità di punti situati in una regione analoga all'"equatore". Ciò dipende dal fatto che, nello spazio sferico, le rette si intersecano due volte; mentre nello

spazio ellittico una volta soltanto, giacché un punto e il suo antipode sono considerati identici.

Willem de Sitter non fu l'unico a reagire alla scelta arbitraria di Einstein. Due dei maggiori matematici dell'epoca, Hermann Weyl e Felix Klein, scrissero a Einstein per segnalargli la questione topologica. Massimo esperto di geometria e di teoria dei gruppi, Weyl occupava la cattedra di matematica al Politecnico di Zurigo – dove Einstein aveva studiato con esiti non brillantissimi. "Nel mio lavoro ho sempre cercato di coniugare verità e bellezza. Quando, però, ho dovuto compiere una scelta tra l'una e l'altra, ho sempre scelto la bellezza", scriverà Einstein anni dopo. Quanto a Felix Klein, nessuno più di lui aveva la capacità di discutere della topologia dello spazio: nel 1872, a soli 23 anni, aveva presentato per la ripresa dei corsi dell'Università di Erlangen una dissertazione che conteneva *in nuce* un programma di ricerca volto a inquadrare in maniera sistematica le varie branche della geometria fino ad allora separate. Fu uno dei momenti più alti della storia della matematica, ed è all'origine dell'integrazione della geometria in una concezione unificata delle differenti discipline matematiche basata sulle nozioni di simmetria, di gruppo di trasformazioni e di topologia!

Einstein rispose a Weyl in una lettera del giugno 1918: "Ho, però, un oscuro presentimento che mi fa preferire il [modello] sferico. Sento che le varietà nelle quali ogni curva chiusa può essere contratta in maniera continua in un punto sono le più semplici. Altri devono nutrire un sentimento simile, poiché, diversamente, in astronomia si sarebbe presa in considerazione l'eventualità che il nostro spazio possa essere euclideo e finito. Lo spazio euclideo a due dimensioni avrebbe allora le proprietà di connessione di una superficie ad anello. È un piano euclideo in cui ogni fenomeno è doppiamente periodico, in cui i punti che si trovano sulla stessa griglia periodica sono identici. In maniera analoga, lo spazio ellittico possiede, contrariamente a quello sferico, una classe di curve che non sono riducibili in modo continuo a un punto; per questo mi piace meno di quello sferico. Si può dimostrare

che lo spazio ellittico sia la sola variante dello spazio sferico? Mi sembra di sì".[3]

Einstein ribadirà tale convinzione in una cartolina del 16 aprile 1919, indirizzata questa volta a Felix Klein.[4] I termini impiegati ("oscuro presentimento", "preferire", "sento", "mi piace") indicano come Einstein non avesse alcun argomento fisico da far valere per risolvere la questione in favore del carattere monoconnesso dello spazio: lo guidava soltanto un *pregiudizio estetico*.

Nella sua risposta a Weyl, Einstein si sbagliava anche sull'ultimo punto: in tre dimensioni, oltre allo spazio ellittico esiste un'infinità di varianti topologiche dello spazio sferico, tutte chiuse e comprendenti in particolare gli spazi detti "lenticolari" – è nel caso di superficie bidimensionali a curvatura positiva che vi sono effettivamente soltanto due tipi topologici distinti, la sfera e il piano ellittico. [▶ **p. 355, Classificazione delle superficie; p. 365, Classificazione degli spazi tridimensionali**]

All'epoca, però, nessuno lo sapeva. La classificazione topologica degli spazi tridimensionali era appena agli esordi. Lo studio delle differenti forme di spazio euclideo era cominciato con i lavori di cristallografia. Nel 1885 Fedorov aveva classificato i diciassette gruppi di simmetria per le strutture cristalline [▶ **p. 337, La simmetria**]; ma è solo nel 1934 che W. Nowacki dimostrerà come i gruppi cristallografici possano dare le topologie dello spazio euclideo. Il caso degli spazi a curvatura positiva era stato sollevato da Felix Klein nel 1890 e da Wilhelm Killing nel 1891, ed era noto dai tempi di Einstein sotto il nome di problema di Clifford-Klein. Sarà risolto in maniera soddisfacente soltanto nel 1960 da Joseph Wolf. Quanto al problema degli spazi iperbolici, la loro classificazione sarà seriamente affrontata soltanto negli anni Settanta grazie a William Thurston,[5] e costituisce ancora oggi uno degli ambiti di ricerca più battuti.

3. Archivi Einstein a Princeton.
4. Per questo testo vedi J.-P. Luminet, *L'Invention du Big Bang*, Le Seuil, Paris 2004.
5. Un'illuminante sintesi si trova in W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton 1997. Thurston ha ricevuto la Fields Medal nel 1982.

cosmologia	**topologia**
1687 Newton: $\mathbf{R^3}$	
	1885 Fedorov: gruppi di $\mathbf{R^3}$
	1890 Clifford-Klein: gruppi di $\mathbf{S^3}$
1917 Einstein: $\mathbf{S^3}$	
1917 de Sitter: $\mathbf{P^3}$	
1922 Fridman: $\mathbf{S^3}$	
1924 Fridman: $\mathbf{H^3}$, $\mathbf{H^3/G}$	
1927 Lemaître: $\mathbf{S^3}$-$\mathbf{P^3}$, $\mathbf{H^3}$	
1929 Robertson-Walker: $\mathbf{S^3}$-$\mathbf{R^3}$-$\mathbf{H^3}$	
1931 Einstein-de Sitter: $\mathbf{R^3}$	
	1934 Nowacki: $\mathbf{R^3/G}$
1958 Lemaître: $\mathbf{H^3/G}$	
	1960 Wolf: $\mathbf{S^3/G}$
	1978 Thurston, Fomenko, Weeks...: $\mathbf{H^3/G}$

44.1 Storia parallela della classificazione topologica degli spazi e della loro applicazione alla cosmologia

I simboli $\mathbf{R^3}$, $\mathbf{S^3}$, $\mathbf{H^3}$ designano rispettivamente gli spazi monoconnessi euclideo (infinito), ipersferico (finito) e iperbolico (infinito). $\mathbf{P^3}$ indica lo spazio proiettivo, la più semplice variante multiconnessa dell'ipersfera. I simboli $\mathbf{R^3/G}$, $\mathbf{S^3/G}$ e $\mathbf{H^3/G}$ designano le varianti multiconnesse degli spazi euclideo, ipersferico e iperbolico, ottenute identificando i punti mediante le trasformazioni di un gruppo **G**.

Storicamente, dunque, il rapporto tra topologia e cosmologia è diverso da quello tra geometrie non euclidee e relatività.

Le geometrie non euclidee e il calcolo tensoriale in spazi riemanniani avevano raggiunto un alto livello di sviluppo quando i fisici ne ebbero bisogno per modellizzare la gravitazione; di contro, i pionieri della cosmologia relativistica desiderosi di tener conto della topologia nei loro modelli d'universo non avevano granché da racimolare sul versante matematico.

Abbiamo visto, peraltro, come la scoperta di modelli non statici di universo, da parte di Fridman (1922) e di Lemaître (1927), avesse definitivamente cambiato il volto della cosmologia. Molto meno noto è che i loro articoli contenevano anche considerazioni profonde circa la struttura globale dell'Universo. Entrambi avevano preso rapidamente coscienza dell'incompletezza della teoria della relatività generale rispetto alla questione topologica.

La discussione di questo punto da parte di Fridman si trova nell'articolo del 1924 in cui egli scoprì i modelli iperbolici di universo in espansione perenne. Nel paragrafo finale Fridman individuò con chiarezza i limiti fondamentali delle teorie cosmologiche basate sulla relatività generale: "In assenza di ulteriori ipotesi, le equazioni di Einstein non consentono di dirimere la questione circa la finitezza del nostro universo". Passò poi a mostrare come lo spazio possa diventare finito se si identificano i punti tra loro (cioè se, in termini topologici, si rende lo spazio multiconnesso). Intuì, inoltre, come tale possibilità consentisse l'esistenza di "fantasmi" – nel senso che in uno stesso punto coesistono un oggetto e le sue proprie immagini. "Uno spazio a curvatura positiva è sempre finito", osservò infine, ma le conoscenze matematiche non permettono di "risolvere la questione della finitezza per uno spazio a curvatura negativa."

Contrariamente a Einstein, Fridman non nutriva alcun pregiudizio a favore della topologia monoconnessa; ma pensava, al pari della maggior parte dei fisici dell'epoca, che soltanto gli spazi di volume finito fossero ammissibili per descrivere lo spazio reale. I modelli di universo proposti da Einstein e de Sitter nel 1917, e da Fridman nel 1922, avevano tutti una curvatura positiva e quindi soddisfacevano al criterio della finitezza. Con i modelli a curvatura negativa, il problema era più arduo: lo spazio iperbolico, nella sua versione più semplice (topologia monoconnessa), si estende all'infinito. Di conseguenza, persino al momento della "creazione" dell'Universo, lo spazio era infinito: in altri termini, l'Universo non è nato in un punto, ma l'espansione ha avuto inizio in ogni punto di uno spazio infinito preesistente. Consapevole di questa difficoltà, Fridman cercò una scappatoia nel fatto che le equazioni di Einstein non bastano da sole per decidere se lo spazio sia finito o infinito, quand'anche la curvatura fosse negativa o nulla. Occorrevano ulteriori ipotesi che specificassero condizioni limite, in particolare occorreva sapere se certi punti dello spazio fossero identificati tra loro o meno. L'intero problema della topologia cosmica era così formulato, ma Fridman non di-

sponeva degli sviluppi matematici sufficienti per proseguire la discussione.

Lemaître condivideva appieno la tendenza comune in favore della finitezza dello spazio. Definì la geometria riemanniana come quella che aveva "dissipato l'incubo dello spazio infinito".[6] Tutti i modelli cosmologici che costruì a partire dal 1927 ipotizzavano uno spazio a curvatura positiva, necessariamente finito, ma avente la topologia dello spazio proiettivo e non quella dell'ipersfera. Ciò non gli impedì di riconoscere altre possibilità. Fu, a quanto pare, il primo cosmologo a rimarcare che le metriche di curvatura negativa ammettono topologie di volume finito: "È vero che uno spazio localmente iperbolico non è necessariamente aperto. È possibile costruire spazi del genere aventi un volume finito. Ciò non vale per lo spazio euclideo".[7]

Sfortunatamente, i cosmologi della prima metà del XX secolo non disponevano di alcuno strumento sperimentale per misurare la topologia dell'Universo, proprio come Gauss e Lobačevskij, a metà del XIX secolo, non avevano alcuno strumento sperimentale per misurare la curvatura dello spazio. Per questo la maggior parte di loro perse interesse alla questione. Quando, nel 1932, Einstein e de Sitter proposero il modello euclideo in espansione perpetua, evitarono tutto quello che poteva contrastare la massima semplicità; supposero una curvatura nulla, una costante cosmologica nulla, e non si preoccuparono nemmeno di precisare che la topologia era monoconnessa.

Questa soluzione assai particolare costituì il modello cosmologico "standard" per circa sessant'anni – quella che potremmo chiamare anche l'età oscura della topologia cosmica. La quasi totalità dei manuali di cosmologia, specialistici o meno, non menzionarono mai la questione topologica, riducendo il problema del carattere finito o infinito dello spazio a quello della sua curvatura. Gli sforzi sia della cosmologia os-

6. Testo pubblicato postumo in "L'Univers, problème accessible à la science humaine", in *Revue d'histoire scientifique*, 31, 1978, pp. 345-359.

7. G. Lemaître, *La Structure et l'évolution de l'univers*, 11e Conseil de physique, Solvay, 1958.

servativa sia di quella teorica si concentrarono sulla determinazione del tasso di espansione e della curvatura dello spazio. I due esempi più illustri furono un manuale specialistico di Steven Weinberg,[8] che ha rappresentato una sorta di bibbia per tutti gli studenti della mia generazione, e un volume divulgativo di George Gamow.[9] Grazie al suo talento di pedagogo e di umorista, Gamow plasmò l'immaginazione di due generazioni di giovani lettori, al punto da convertire alcuni alla professione di cosmologi. Il rovescio della medaglia è che, affermando a più riprese che gli spazi euclidei e iperbolici erano necessariamente infiniti, Gamow fu in parte responsabile del disinteresse della professione per la topologia cosmica!

Per fortuna, questo diktat non fu accettato da tutti. Vi furono alcuni dissidenti, *in primis* dei teorici della cosmologia quantistica, per i quali la questione della topologia dell'Universo aveva grandissima importanza. La cosmologia quantistica, infatti, cerca di comprendere il meccanismo, che si suppone appunto di natura quantistica, in base al quale l'Universo avrebbe cominciato a esistere. Essi tendono a prolungare la storia dell'Universo, raccontata dalla relatività generale, sino a un'epoca così remota che la relatività non sarebbe in grado di descriverla e per la quale sarebbe necessaria una generalizzazione quantistica. Negli anni Sessanta, John Wheeler fu il primo a ipotizzare che la topologia dello spazio-tempo potesse fluttuare a livello microscopico. Furono delineati scenari in cui il Big Bang era sostituito da una nascita spontanea dell'Universo a partire da fluttuazioni quantistiche casuali. Poiché l'ambizione ultima di questi nuovi approcci era calcolare tutte le proprietà dell'Universo così creato e conciliare le proprietà predette con la realtà osservabile, una delle proprietà che si poteva sperare di predire era la topologia dello spazio. Nessuno seppe portare a termine un simile programma; ma almeno venne rilanciato l'interesse per la topologia nel quadro della cosmologia classica.

8. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology; Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, J. Wiley, New York 1972.

9. G. Gamow, *La creazione dell'Universo*, tr. it. Mondadori, Milano 1956.

Nel 1971 il cosmologo inglese George Ellis pubblicò un importante articolo in cui faceva il punto sui recenti sviluppi matematici concernenti la classificazione degli spazi e le loro possibili applicazioni alla cosmologia. Ne seguì un ritorno d'interesse per la topologia, grazie anche all'azione di fisici teorici quali il russo Dimitrij Sokolov, il brasiliano Helio Fagundes e il cinese Fang Lizhi (dissidente politico poi costretto a emigrare negli Stati Uniti). Un programma osservativo fu avviato nell'allora Unione Sovietica, sotto la direzione di Viktor Shvartsman. Con il telescopio di sei metri di diametro appena installato a Zelenčuk, nel Caucaso, si andò alla ricerca delle sorgenti fantasma, cioè le immagini multiple di un medesimo oggetto, di cui aveva parlato Fridman nel 1924. Tutti i test fallirono: non venne identificata alcuna immagine fantasma della nostra Via Lattea o di un vicino ammasso di galassie. Tale risultato negativo consentì di fissare dei vincoli alla taglia minima di uno spazio multiconnesso; ma certo non incoraggiò i ricercatori a continuare in questo tipo di indagini. Di nuovo, l'interesse sembrò venir meno.

Per quanto mi riguarda, l'idea di uno spazio topologicamente piegato aveva cominciato a solleticare la mia immaginazione fin dagli anni dell'Università. Un eccellente testo divulgativo del cosmologo francese Jean Heidmann,[10] che avevo letteralmente divorato mentre stavo preparando un esame di matematica, non soltanto mi aveva spinto a dedicarmi professionalmente alla cosmologia, ma aveva anche attirato la mia attenzione sulla straordinaria ricchezza di forme che la topologia poteva apportare alla descrizione dello spazio fisico. Le mie prime ricerche, tuttavia, furono dedicate ai buchi neri – un argomento che offriva già prospettive originali sulla struttura dello spazio e del tempo. Lasciai momentaneamente la questione topologica a riposare in un cassetto del mio cervello, accontentandomi di redigere, nel 1985, un paragrafo sulla topologia cosmica in un articolo enciclopedico consacrato alla

10. J. Heidmann, *Introduction à la cosmologie*, PUF, Paris 1973.

geometria dell'Universo.[11] Dopo dieci anni di indagini sui buchi neri, questi oggetti speculativi persero ai miei occhi un po' del loro mistero, nella misura in cui la loro esistenza reale veniva sempre più assicurata dall'osservazione astronomica. Riaprii allora il cassetto "topologia" e mi lanciai in una ricerca bibliografica approfondita sull'argomento, al termine della quale potei constatare che restava ancora quasi tutto da fare. Durante il soggiorno (1998-1999) al prestigioso Dipartimento di Astronomia dell'Università di Berkeley, le mie discussioni sulla topologia cosmica suscitarono, al più, un cortese interesse. Dire agli astrofisici che i quasar e gli ammassi lontani di galassie che essi osservavano da tanti anni sono forse soltanto fantasmi non era, lo ammetto, il modo più diplomatico per convogliare attenzione sulle mie ricerche. Dovevo anche combattere il pregiudizio per cui l'astronomia sposterebbe sempre più in là le frontiere osservabili di un Universo che, quand'anche non fosse infinito, non sarebbe comunque mai completamente accessibile. Pretendere il contrario, ossia che l'Universo reale è forse più piccolo dell'Universo osservato, significa andare contro il senso comune. Ma ciò non basta per scartare l'idea – prova il contrario la storia della scienza.

È solo al ritorno in Francia che mi sono dedicato *in toto* al problema, in collaborazione con Marc Lachièze-Rey del Servizio Astrofisico di Saclay. Non senza rischi dal punto di vista professionale, poiché, occupandoci di un argomento per lo più inesplorato, il nostro tasso di pubblicazioni annuali era ovviamente destinato a diminuire. Fortunatamente, il sistema di ricerca francese entro il CNRS ha il vantaggio di tollerare questo tipo di situazione. All'estero, la frequenza di pubblicazioni segna la sorte dei giovani ricercatori: *publish or perish*. In tali condizioni, essi sono spinti a interessarsi soltanto a problemi minori che garantiscono pubblicazioni rapide, a detrimento di profonde questioni concettuali. Il matematico inglese Andrew Wiles, diventato celebre nel 1995 per aver dimostrato

11. "Géométries de la variété univers", in J. Schneider (a cura di), *Aux Confins de l'Univers*, Encyclopédie Diderot, Fayard 1985.

l'ultimo teorema di Fermat, aveva finito per perdere il posto perché non aveva pubblicato nulla per qualche anno!

Nel 1995 apparve sulla rivista americana *Physics Reports* il nostro articolo intitolato "Cosmic Topology", in cui passavamo in rassegna tutto quello che i ricercatori avevano pubblicato al riguardo a partire dal 1917 (una cinquantina di articoli in tutto) e indicavamo le nuove piste di ricerca che ci sembravano più promettenti, come il metodo della cristallografia cosmica.[12] Prevedevamo un ritorno di interesse a livello internazionale per un argomento manifestamente trascurato e ci auguravamo che matematici, teorici della cosmologia e astronomi unissero le loro competenze. Di fatto, i tempi erano maturi: i cosmologi disponevano finalmente di strumenti matematici e sperimentali in grado di individuare la topologia dell'Universo. Il cielo veniva scandagliato sempre più a fondo e cominciava a rivelarsi la geografia tridimensionale dell'Universo; il satellite astronomico COBE scrutava i dettagli della struttura della radiazione fossile, consentendo così di indagare il passato più lontano dell'Universo.

Per una curiosa ironia della storia, comparvero nello stesso anno due articoli americani che andavano completamente contro le nostre speranze: i loro autori dichiaravano che l'idea di un piccolo universo *chiffonné* (spiegazzato) era esclusa dai dati del satellite COBE e che era inutile perdervi tempo. Gli articoli venivano dal Dipartimento di Astronomia di Berkeley! Le mie "elucubrazioni" californiane non erano, dunque, cadute nel vuoto; ma non erano state utilizzate come speravo.

Il nostro primo articolo sul metodo della cristallografia cosmica, redatto insieme con Roland Lehoucq, fu addirittura respinto dallo *Astrophysical Journal*. I referee risposero brutalmente che la questione era chiusa dai dati negativi di COBE. Dopo un breve periodo di scoraggiamento, inviammo il nostro articolo alla rivista europea *Astronomy and Astrophysics*, che lo accettò. Eravamo convinti che l'interpretazione dei dati

12. Non avevamo ancora appreso che già nel 1900 Schwarzschild aveva proposto l'idea di un universo cristallografico.

di COBE sostenuta dai nostri colleghi americani non fosse del tutto corretta, in quanto essi traevano una conclusione negativa generale a partire da casi particolari – esclusivamente euclidei –, i soli che avevano saputo trattare.

Di fatto, quello che speravamo si è oggi avverato: a livello mondiale cresce l'interesse per la topologia cosmica, dal punto di vista sia teorico sia osservativo. Il numero di articoli sulla topologia cosmica apparsi negli ultimi anni ha superato quello degli articoli pubblicati in più di ottant'anni sulla cosmologia relativistica. La forma dello spazio è diventata uno dei problemi più eccitanti della cosmologia. Parecchie decine di ricercatori vi lavorano in ogni parte del mondo e sono stati organizzati i primi convegni esclusivamente dedicati all'argomento. Sono persuaso che la topologia cosmica sia semplicemente all'inizio della sua carriera: altrimenti, non avrei scritto *questo libro*!

POSTFAZIONE
ASCOLTANDO IL TAMBURO COSMICO

> Alcuni pensano che il calcio sia questione di vita o di morte. Posso garantire che vi sono cose ben più importanti.
>
> BILL SHANKLY, manager del Liverpool F.C.

La musica dell'Universo

Abbiamo visto (p. 311-328) come i cosmologi sperino di "ascoltare la forma dello spazio", ossia di individuarne la topologia, analizzando in dettaglio le fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile. L'universo giovane, infatti, ha "suonato" come uno strumento musicale: prima della separazione di materia e luce, le particelle erano soggette a due forze in contrasto, la pressione della gravitazione e quella della radiazione. Strattonato da queste due, il brodo primordiale si è messo a oscillare e a vibrare. Quando, trascorsi 380.000 anni, i fotoni ne sono scappati e, dopo 13,7 miliardi di anni, sono stati catturati dai nostri telescopi a microonde, essi hanno portato seco questa segnatura vibratoria. Le piccole macchie calde e fredde che appaiono nelle mappe della radiazione cosmica sono come granelli di sabbia sulla superficie di un tamburo: i loro arabeschi rivelano come si sono propagati.

Lo studio dettagliato di questi motivi contiene l'intera informazione circa la taglia e la forma del tamburo, l'elasticità e la costituzione della sua membrana, ecc. In particolare, è facile capire come la distribuzione statistica dei granelli dipenda:

– dalla vibrazione iniziale del tamburo. A seconda che lo facciate vibrare colpendolo con una bacchetta al centro o sfiorandone il bordo con un archetto di violino, gli arabeschi saranno differenti; nel caso dell'universo, il colpo di bacchetta è un modello di fluttuazioni iniziali, per esempio quelle di origine quantistica;

– dalla sua composizione materiale. Dato un medesimo impulso, una pelle animale e una membrana metallica vibrano in maniera diversa; nel caso dell'universo, le forme di materia ed energia che lo costituiscono dettano in parte il suo modo di vibrare;

– dalla sua curvatura. I motivi saranno differenti a seconda che la superficie del tamburo sia piana (come, in genere, accade), leggermente concava oppure leggermente convessa. Nel caso dell'universo, il valore della curvatura spaziale, a seconda che essa sia nulla, negativa o positiva, è codificata dalla taglia dei grumi della radiazione fossile;

– dalla forma globale del tamburo, ossia dalle "condizioni al contorno". Le onde si riflettono e si ricombinano in maniera diversa a seconda che il bordo del tamburo sia un cerchio, un'ellisse, un quadrato, ecc. Ovviamente, il tamburo-universo non ha bordi; ma la sua topologia svolge dal punto di vista matematico il ruolo delle condizioni al contorno.

Come analizzare le vibrazioni cosmiche in modo da ricavarne tutte le informazioni? La vibrazione di un tamburo può essere espressa da una combinazione delle sue armoniche fondamentali; analogamente, le fluttuazioni di temperatura dell'universo primordiale possono essere espresse dalle combinazioni dei modi fondamentali di vibrazione dello spazio.

Dopo aver ultimato il nostro programma sulla topologia attraverso i metodi della "cristallografia cosmica" (vedi pp. 143-153), dal 2001 ci siamo dedicati allo studio delle segnature topologiche nella radiazione fossile. Al nostro gruppo si è aggiunto Alain Riazuelo, che aveva appena concluso il dottorato, rivelandosi uno dei migliori specialisti mondiali dell'analisi armonica della radiazione. Abbiamo così potuto sviluppare un

modello estremamente tecnico per lo studio delle vibrazioni dell'universo. Per un confronto con i dati osservativi provenienti dal satellite WMAP, abbiamo "simulato" al computer delle mappe ad alta risoluzione della radiazione fossile, calcolate teoricamente a partire da un'ampia classe di spazi a topologia multiconnessa. Abbiamo avuto modo di constatare come il metodo delle "coppie di cerchi correlati" (vedi pp. 155-169) offra una segnatura topologica ben definita. In parole povere, abbiamo mostrato come la forma di uno spazio possa essere "ascoltata" in un'unica maniera. A tal fine, occorre calcolare le armoniche (i cosiddetti "modi propri del laplaciano") per le diverse topologie possibili. Quindi, a partire dalle condizioni iniziali che fissano il modo in cui l'universo ha cominciato a mettersi in moto, bisogna calcolare l'evoluzione nel tempo di queste armoniche, così da simulare al computer mappe realistiche e precise della radiazione fossile in un gran numero di configurazioni possibili. Nel caso delle topologie euclidee, i modi propri sono matematicamente noti, il che semplifica enormemente il problema. Di contro, ci è voluto non poco lavoro per calcolare i modi propri degli spazi sferici, un compito questo più da matematici che da astronomi! Ed è a questo punto che la composizione multidisciplinare del nostro gruppo di ricerca si è rivelata utilissima... Quanto agli spazi iperbolici, nella maggior parte dei casi i modi propri sono calcolabili soltanto ricorrendo ad approssimazioni numeriche, complicate e poco affidabili.

Le osservazioni della radiazione fossile effettuate su pallone dal 1999 al 2002 (esperimenti Boomerang, Maxima, Dasi, Archeops) avevano posto certi limiti alla curvatura dello spazio, il cui valore risultava compreso in uno stretto intervallo intorno allo zero (corrispondente al modello dell'universo "piatto"); tuttavia, esse non consentivano di conoscere il segno esatto di tale curvatura, né, soprattutto, di sapere se la topologia dello spazio fosse monoconnessa (per esempio, quella dello spazio piatto finito) o multiconnessa (per esempio, quella di un ipertoro piatto e finito oppure quella di uno spazio sferico dodecaedrico). La ragione è che queste misure co-

privano soltanto una porzione piccolissima della sfera celeste e non potevano, pertanto, essere utilizzate per controllare le proprietà geometriche a grande scala dello spazio. Per questo bisognava aspettare le mappe della radiazione fossile acquisite dal satellite WMAP, il cui lancio era previsto per il 2001 e i primi dati per il 2003.

La rivoluzione WMAP

Lanciato il 30 giugno 2001, il satellite WMAP (acronimo, lo ricordiamo, di *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) ha minuziosamente integrato, sostituito e migliorato i dati raccolti dieci anni prima dal suo predecessore COBE (vedi figura A). Come sperato, i primi risultati, resi pubblici nel febbraio 2003, hanno permesso di decifrare buona parte delle vibrazioni del tamburo cosmico e di ricavarne informazioni, con una precisione finora ineguagliata, sui valori dei "parametri co-

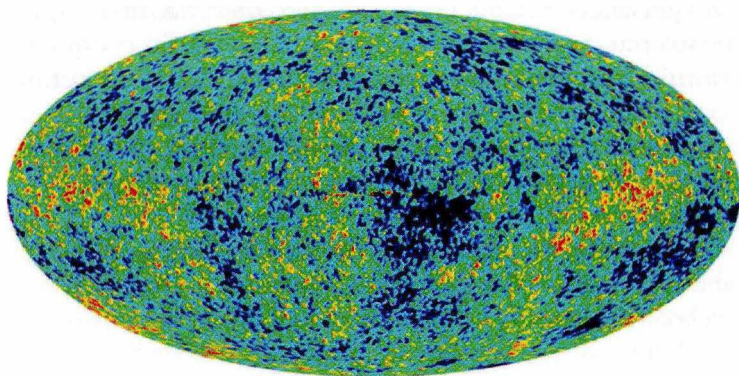



Figura A

Carta WMAP *delle fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile.* La totalità del cielo è rappresentata qui nel dominio delle microonde, e rivela il residuo della luce emessa dall'universo giovane dopo 380.000 anni d'espansione. Le minuscole fluttuazioni di temperatura sono codificate dai colori. Corrispondono ai piccolissimi grumi di densità che, condensandosi, hanno in seguito generato le prime galassie. L'età dell'Universo, la sua geometria e il suo destino sono inscritti nella distribuzione statistica dei grumi.

smologici", i quali governano l'età, l'evoluzione, il destino, la composizione e la forma dell'Universo.

L'età dell'Universo (vedi pp. 253-257) è ormai fissata a 13,7 miliardi d'anni, con un margine d'errore dell'1%. L'epoca d'emissione della prima luce – quella che vediamo nella radiazione fossile – data 380.000 anni.

Il tasso d'espansione attuale (vedi pp. 247-251) è di 71 km/s per megaparsec, con un margine d'errore del 5%.

L'Universo (vedi pp. 291-309) è composto per il 4% di materia atomica ordinaria (barionica), per il 23% di materia esotica (non barionica), e per il 73% di energia oscura. La natura di quest'ultima deve essere ancora analizzata. Se si trattasse di un termine costante, tipo la costante cosmologica o l'energia del vuoto quantistico (vedi pp. 277-289), questa energia dominerebbe definitivamente la dinamica futura dell'Universo e gli conferirebbe un'*espansione perpetua accelerata*. Nel 2003 misure indipendenti realizzate su supernovae hanno rafforzato tale ipotesi, consentendo persino di indicare l'epoca in cui l'accelerazione dell'espansione sarebbe cominciata: quasi un miliardo e mezzo d'anni. Tuttavia, poiché la natura esatta dell'energia oscura rimane ipotetica, alcuni modelli (per esempio, quelli battezzati "quintessenza") ammettono la possibilità di una variazione dell'energia oscura nel corso del tempo; se, dunque, in futuro essa diminuisse, invece di restare costante, la densità di materia la supererebbe di nuovo, sicché l'accelerazione dell'Universo cederebbe il posto a una decelerazione, che potrebbe culminare in un universo chiuso con, alla fine, il suo Big Crunch…

WMAP ha fornito un'informazione più inattesa e assai interessante per quanto concerne la formazione delle galassie: le prime stelle dell'Universo sarebbero apparse 200 milioni di anni dopo il Big Bang (cioè 500 milioni d'anni prima di quanto stimato precedentemente). Ne segue che la materia oscura "fredda" prevale sulla materia oscura "calda" (vedi pp. 291-309). Che le prime stelle si siano formate in un tempo così breve come 200 milioni d'anni favorisce tale ipotesi. In un universo dominato dalla materia oscura calda (per esempio,

da neutrini) la gravità ci avrebbe messo di più a provocare la condensazione del gas e le prime stelle sarebbero comparse molto più tardi. La formazione dell'Universo, dunque, è probabilmente cominciata da piccole galassie, che si sarebbero progressivamente agglomerate per formare galassie maggiori, e poi ammassi e superammassi.

Passiamo ora alla curvatura dello spazio. Ricordo che essa può essere determinata a partire dal valore normalizzato del parametro di densità d'energia Ω_0: $\Omega_0 < 1$ corrisponde a uno spazio a curvatura negativa (geometria iperbolica), $\Omega_0 = 1$ a uno spazio a curvatura nulla, detto anche "piatto" (geometria euclidea), $\Omega_0 > 1$ a uno spazio a curvatura positiva (geometria sferica). Combinati con altre misure, i dati di WMAP indicano che $1{,}00 \leq \Omega_0 \leq 1{,}04$. Tale risultato è marginalmente compatibile con il modello di spazio piatto fino ad allora privilegiato dal consenso e dalla teoria dell'inflazione. Tuttavia, la bilancia pende chiaramente in favore di uno spazio a curvatura positiva, dunque finito, e sembra eliminare il caso di uno spazio iperbolico.

Per certi versi, tale risultato era confortante per il nostro gruppo di ricerca. Avevamo, infatti, mostrato, da un lato, che le topologie iperboliche non avrebbero potuto in pratica essere rilevate; dall'altro, che le topologie sferiche sarebbero state più facilmente rilevabili di quelle euclidee (per ragioni troppo sofisticate per essere esposte qui). Dunque, avevamo focalizzato i nostri lavori teorici sul caso degli spazi sferici, rimasti inesplorati quali modelli possibili di universo fisico. Comunque sia, le due ipotesi – spazio piatto o spazio sferico – offrono, dal punto di vista matematico, una grande diversità di strutture topologiche (vedi pp. 365-370): diciotto nel caso di uno spazio euclideo, un'infinità in quello di uno spazio sferico. A ciascuna i suoi effetti speciali: galassie fantasma in un numero più o meno grande, grumi della radiazione fossile che si ripetono in questo o quel modo, universi più piccoli di quello che vedono i nostri telescopi.

Che ne è allora della questione che costituisce l'asse portante di *questo volume*, la topologia dell'universo? Qui le cose

si fanno davvero interessanti... Le mappe cosmiche di WMAP rivelano un aspetto particolarmente intrigante:[1] nella sua infanzia l'Universo non "suona" come dovrebbe se lo spazio fosse euclideo e infinito. È in qualche modo afono sulle grandi lunghezze d'onda. Cerchiamo di precisare come.

Le fluttuazioni di temperatura della radiazione fossile pos-

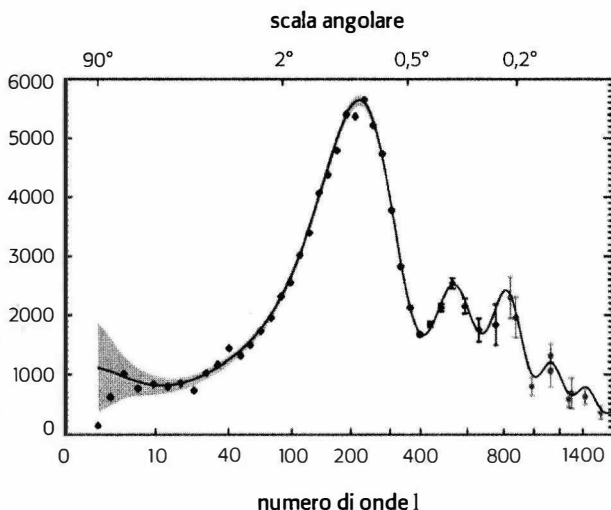



Figura B

Spettro di potenza della radiazione fossile a microonde. I dati del satellite WMAP (rombi neri) hanno accresciuto la precisione dello spettro ben al di là di quella ottenuta dalle misure precedenti. Il diagramma riflette le piccole differenze nella temperatura della radiazione fossile. Il suo spettro presenta una serie di picchi corrispondenti a piccole separazioni angolari (o, il che è equivalente, a grandi numeri d'onda l). Il picco principale corrisponde alla taglia angolare dei grumi più frequenti nella figura A. La posizione e l'ampiezza di questo picco consente, in particolare, di vincolare la curvatura dello spazio. Alle maggiori separazioni angolari, questa struttura scompare e i dati predetti dal modello standard dovrebbero seguire un andamento orizzontale. Le misure di WMAP cadono, però, molto al di sotto dell'andamento orizzontale al livello dei primi numeri d'onda, detti quadrupolo ($l = 2$) e ottupolo ($l = 3$). Il modello cosmologico euclideo e infinito (curva rossa) non può spiegare tutto ciò; invece, il modello di universo finito a topologia multiconnessa ben proporzionata non ha difficoltà a farlo.

1. Esso era già presente nei dati precedenti di COBE, ma a un livello di precisione statisticamente non significativo.

sono essere scomposte in una combinazione di armoniche sferiche, proprio come il suono prodotto da uno strumento musicale può essere scomposto in armoniche ordinarie. L'armonica fondamentale fissa l'altezza del suono (per esempio, il *la* del diapason ha una frequenza di 440 Hertz), mentre l'ampiezza relativa di ciascuna armonica determina il timbro (il *la* del pianoforte è diverso da quello del clavicembalo). Nel caso della radiazione fossile, l'ampiezza relativa di ciascuna armonica fissa lo "spettro di potenza" (vedi figure 38.5 e 38.6), che contiene una segnatura della geometria dell'universo e delle condizioni prevalenti al momento dell'emissione della radiazione. Ricordo che lo spettro di potenza esibisce un insieme di picchi quando lo scarto è misurato entro regioni del cielo di piccole e medie dimensioni, vale a dire separate da piccoli angoli. Nell'analisi armonica di WMAP (figura B) questi picchi sono conformi a quanto predetto dal "modello standard" (spazio euclideo infinito). A grande scala angolare (per regioni tipicamente separate da più di 60°), invece, vi è una perdita notevole di potenza che non si accorda con le predizioni del modello standard.

La prima armonica osservabile è il *quadrupolo* (il cui numero d'onda è $l = 2$). Corrisponde a un angolo di osservazione di 90° – un quarto di cerchio, da cui il termine. WMAP ha osservato un quadrupolo 7 volte minore di quello che ci si aspetta in uno spazio euclideo infinito. La probabilità che questo scarto si produca per caso è di 0,2%. Anche la seconda armonica, l'ottupolo (il cui numero d'onda è $l = 3$), è minore di quella predetta teoricamente (72% del valore atteso). Di contro, per valori maggiori del numero d'onda e fino a $l =$ 900 (che corrispondono a fluttuazioni di temperatura su piccolissime scale angolari), le osservazioni risultano spiegate piuttosto bene dal modello standard.

Il basso valore del quadrupolo significa che mancano le onde di grande lunghezza. Alcuni cosmologi hanno ipotizzato che tale anomalia andrebbe attribuita a leggi fisiche non ancora scoperte, che avrebbero retto l'Universo primordiale. A noi è apparsa più naturale, in quanto puramente geometrica (cioè

nello spirito della relatività generale), una spiegazione basata su un modello di spazio finito, in cui la taglia dello spazio impone un valore massimo alle lunghezze d'onda autorizzate.

Di fatto, un tamburo grande e uno piccolo non suonano allo stesso modo! Nessun suono grave uscirà da quello piccolo, poiché la lunghezza d'onda deve essere inferiore al diametro dello strumento. Lo stesso vale per l'Universo. Se la sua taglia è infinita, o almeno molto più grande dell'orizzonte cosmologico, tutte le lunghezze d'onda sono autorizzate e le fluttuazioni devono essere presenti a tutte le scale. Al contrario, se la sua taglia è finita e minore di quella dell'orizzonte, allora non possono darsi lunghezze d'onda troppo grandi. In questo tipo di piccolo universo spiegazzato deve esservi una scala di lunghezza naturale al di sopra della quale l'Universo cessa di vibrare, e ciò si traduce in una perdita di potenza nello spettro della radiazione fossile su scale angolari maggiori del massimo consentito. Proprio quello che si osserva nei dati di WMAP...

Uno spazio ben proporzionato

Intuitivamente, si potrebbe pensare che ogni topologia multiconnessa, dal momento che introduce una finitezza spaziale in almeno una direzione, debba ridurre lo spettro di potenza alle grandi lunghezze d'onda. Abbiamo esaminato la questione e abbiamo mostrato come, in realtà, alcune topologie finite multiconnesse abbassino effettivamente il quadrupolo, mentre altre lo aumentino. I modi vibratori di grande lunghezza d'onda tendono a essere relativamente deboli solo in una famiglia di spazi finiti multiconnessi, detti "ben proporzionati". In generale, tra gli spazi le cui dimensioni sono paragonabili al raggio della superficie di ultima diffusione (condizione per cui gli effetti topologici sullo spettro di potenza siano osservabili), gli spazi le cui tre dimensioni siano dello stesso ordine sopprimono il quadrupolo. Non appena una delle dimensioni diviene significativamente maggiore o minore delle altre, il quadrupolo aumenta. La dimostrazione è geometrica, ma noi

l'abbiamo anche controllata numericamente nel caso di tori euclidei di cui abbiamo fatto variare le proporzioni (il toro cubico diminuisce il quadrupolo, mentre il toro oblato e prolato lo aumenta), nonché in quello di spazi sferici (gli spazi poliedrici indeboliscono il quadrupolo, mentre gli spazi lenticolari d'ordine elevato, altamente anisotropi, lo rafforzano). Gli spazi ben proporzionati rappresentano, dunque, i dati di WMAP meglio di quanto non faccia il modello standard (figura C).

Il risultato era importante; mi misi subito a redigere una "lettera" destinata a *Nature*. Questo settimanale scientifico, il più prestigioso al mondo, pubblica soltanto brevi articoli e relativamente poco tecnici, dal momento che devono risultare comprensibili all'insieme della comunità scientifica: un biologo dovrebbe poter seguire le argomentazioni di un astrofisico, e viceversa! Data la valanga di comunicazioni che la rivista riceve da tutti i settori disciplinari, la scelta non può che essere estremamente selettiva. Molti dei suoi numeri non contengono neppure un articolo di astrofisica, e *a fortiori* di cosmologia.

Nel giugno 2003, tuttavia, decidiamo di contattare il direttore della rivista al fine di sottoporgli una versione preliminare del lavoro. Ci risponde: "Riceviamo moltissimi articoli di co-

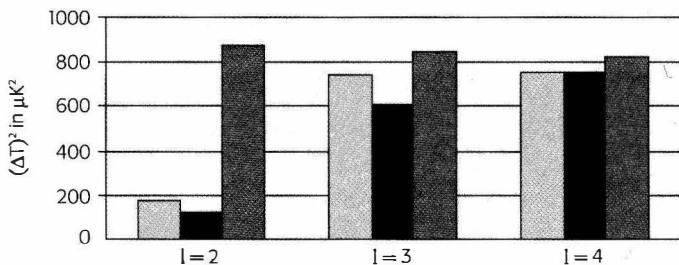



Figura C

Confronto tra l'ampiezza delle fluttuazioni osservate da WMAP *(in nero) e quella calcolata per uno spazio euclideo infinito (grigio scuro).* Il calcolo è stato effettuato per una densità di materia di 0,28 e una costante cosmologica di 0,714. Il disaccordo è significativo per il primo numero d'onda detto quadrupolo ($l = 2$), meno per il secondo, detto ottupolo ($l = 3$). L'accordo è molto migliore nel caso di un particolare spazio ben proporzionato, il cosiddetto "spazio dodecaedrico di Poincaré" (in grigio chiaro).

smologia che vengono inviati a *Nature* al solo scopo di rilanciare il dibattito intorno a una nuova idea. Normalmente, articoli del genere vengono scartati, senza neppure essere letti, poiché non riteniamo che debba essere questa la politica della rivista. Vi sono moltissimi eccellenti periodici specializzati che possono assolvere a tale compito. Non intendo con ciò scoraggiarvi; credo, però, che dobbiate essere consapevoli che una pubblicazione su *Nature* si scontra con un'enorme barriera di potenziale. Pubblichiamo meno del 10% dei testi che ci sono inviati (e questa cifra non tiene conto di quelli "eccentrici"), e appena il 25% di tali testi viene sottoposto a referaggio. Riceviamo più di 10.000 comunicazioni l'anno. Tuttavia, posso consultare in maniera informale un esperto del settore, per vedere se il vostro lavoro possiede un potenziale sufficiente per essere sottoposto a referaggio".

Sul momento, cala su di noi un vento di delusione. Jeff Weeks ci scrive per posta elettronica: "Ecco la risposta di *Nature*. Come vedete, ci scoraggiano a inviare il testo. Dunque... forse, la cosa migliore è lasciar perdere. [...] Mi dispiace essere così pessimista, ma alla luce di quanto ci scrivono, e cioè che avrebbero preso in considerazione soltanto il 'modello migliore' e non semplicemente un''interessante possibilità', sembra che la probabilità di vedere il nostro articolo accettato da *Nature* sia pressoché zero".

Rintocco di campana ancor più lugubre per i miei collaboratori francesi: "Credo che *Nature* abbia ragione e questo conferma quello che diceva Alain. Penso che allo stato attuale delle cose non sia per noi possibile pubblicare alcunché su *Nature*, e neppure su una rivista specializzata come *Physical Review Letters* o *Astrophysical Journal*", commenta Jean-Philippe Uzan.

Quanto a me, medito sullo scacco per un intero fine settimana. Anni prima ero riuscito a pubblicare su *Nature* un articolo innovativo circa "*crêpes* satellitari", ossia una descrizione teorica di come intere stelle potessero essere spezzate dalle forze di marea di buchi neri giganti.[2] All'epoca era il "miglior

2. Vedi J.-P. Luminet, *I buchi neri*, tr. it. Nardi, Firenze 1992.

modello possibile" di tale fenomeno astrofisico. Come fare ora per trasformare la nostra idea d'universo ben proporzionato in quella del "miglior modello possibile"? Non era certo mia intenzione passare al vaglio l'ampio insieme di forme candidate per selezionare, dopo lunghi mesi di fastidiosi calcoli, la più adeguata.

Lo spazio dodecaedrico

L'illuminazione mi è venuta lavorando... nell'orto della mia casa in campagna! La mente funziona sempre lateralmente, quando il corpo è occupato in attività fisiche, "terra terra"; molte idee mi sono venute mentre coltivavo il mio giardino o mentre camminavo per ore in montagna...

Quel giorno (primavera 2003) mi è balzata agli occhi l'immagine di uno spazio particolarmente ben proporzionato: lo spazio sferico dodecaedrico di Poincaré (vedi pp. 99-109). Perché? È difficile decifrare *a posteriori* le immagini mentali che ci consentono di progredire nella ricerca. Per razionalizzare la cosa, direi che, intuitivamente, ci occorreva un modello di spazio fisico che rispetto al volume dell'universo osservabile non fosse né troppo piccolo (altrimenti gli scarti osservati in relazione allo spettro di potenza teorica calcolato per un universo assai grande non si sarebbero ridotti solo ai grandi angoli) né troppo grande (altrimenti non sarebbe stato osservato alcuno scarto alla scala dell'orizzonte). A prima vista, il modello dodacaedrico sembra quello giusto: il suo volume è 120 volte minore di quello dell'ipersfera avente lo stesso raggio di curvatura. Questo è perfettamente calcolabile una volta dati i tre parametri cosmologici: il parametro di Hubble H_0, la densità di energia Ω_m sotto forma di materia gravitante (visibile e oscura), la densità di energia "antigravitante" Ω_λ (sotto forma di una costante cosmologica o di altri campi di energia più esotici). Per valori plausibili in base ai dati di WMAP, il calcolo dà 140 miliardi di anni luce per il raggio di curvatura dell'ipersfera semplicemente connessa, 53 miliardi

di anni luce per il raggio dell'universo osservabile[3] e 45 miliardi di anni luce per quello dello spazio dodecaedrico di Poincaré. In volume ciò corrisponde a un'ipersfera circa 100 volte maggiore dell'universo osservabile. Dunque, lo spazio dodecaedrico, 120 volte più piccolo dell'ipersfera, avrebbe un volume pari a circa l'80% dell'universo osservabile. Nessun miraggio topologico spettacolare, con centinaia di galassie fantasma; ma la speranza di un piccolo effetto rilevabile nelle grandi scale angolari della radiazione fossile...

Dopo il sogno, i conti. La chiave del problema consisteva nel mostrare che un tamburo sferico dodecaedrico vibrasse teoricamente sulle grandi lunghezze d'onda esattamente come ha vibrato l'universo reale osservato da WMAP. Jeff Weeks ha iniziato a fare i calcoli e non ha tardato a inviarci un messaggio in posta elettronica: "I risultati sono assolutamente straordinari! Che gioia! Non c'è dubbio che lo spazio dodecaedrico di Poincaré possa essere la *star* del nostro articolo per *Nature* (e nessun dubbio, pure, che sarà un super articolo!)".

Stendiamo, dunque, un breve testo in cui, assumendo che lo spazio possieda questa topologia dodecaedrica che permette di rendere conto del quadrupolo e dell'ottupolo osservati da WMAP, ricaviamo con estrema precisione il suo raggio di curvatura e la sua taglia. Dal momento che questo spazio è di tipo sferico, il parametro di densità dell'universo deve essere vincolato da $\Omega_0 > 1{,}01$, con il valore $\Omega_0 = 1{,}013$ quale miglior aggiustamento ai dati sul quadrupolo e l'ottupolo. Il nostro modello è, dunque, falsificabile, poiché i dati del prossimo satellite europeo Planck Surveyor (attesi per il 2007) dovrebbero consentire di determinare questo parametro di densità, a meno dell'1%. Un valore inferiore a 1,01 porterebbe a scartare lo spazio di Poincaré come modello fisico, dal momento che la taglia del dodecaedro diventerebbe superiore a quella dell'universo osservabile e non lascerebbe alcuna segnatura rilevabile sul quadrupolo.

3. Benché i fotoni della radiazione fossile abbiano viaggiato per 13,7 miliardi di anni, l'espansione dello spazio ha allungato la loro strada, sicché la distanza che essi hanno percorso per giungere a noi sulla Terra è di 53 miliardi di anni luce...

Ma il modello di spazio sferico dodecaedrico può non soltanto essere falsificato, bensì anche *confermato* (contrariamente, per esempio, al modello di spazio euclideo infinito). Infatti, come abbiamo visto (pp. 155-169), se lo spazio è multiconnesso, nella radiazione fossile devono esservi delle correlazioni particolari che prendono la forma di coppie di cerchi e lungo le quali le fluttuazioni della temperatura sono identiche, a meno di una rotazione. Il modello dodecaedrico predice l'esistenza di sei coppie di cerchi diametralmente opposti nel cielo (in corrispondenza alle sei coppie di facce identificate dal dodecaedro), il cui raggio angolare sarebbe compreso tra 10° e 40° (valori che dipendono sensibilmente dai parametri cosmologici).

Così redatto, il nostro articolo obbediva alle pure regole del mercato scientifico: una nuova osservazione (la mancanza di vibrazioni acustiche nei dati di WMAP) solleva un problema teorico; viene proposta una spiegazione argomentata (un universo multiconnesso particolare che rende conto dei dati), che comporta inoltre due predizioni (il valore preciso di Ω_0 e sei coppie di cerchi correlati nella radiazione fossile), la cui conferma o la cui smentita potranno confermare o infirmare il modello.

Il nostro articolo viene accettato senza colpo ferire da *Nature* a metà luglio 2003. Vi è, tuttavia, un prezzo da pagare per pubblicare su questa illustre rivista britannica: il segreto. Di solito, ogni articolo accettato per la pubblicazione in una rivista è immediatamente inserito negli archivi elettronici, il che accelera notevolmente la sua diffusione nella comunità scientifica. *Nature* vieta, però, che qualunque articolo accettato circoli in qualunque modo prima della sua pubblicazione cartacea: né in Internet, né tra i colleghi sotto forma di estratto o di relazione a convegni! Ci si deve tenere a freno in attesa dell'uscita, sperando che nessun altro gruppo di ricerca intraprenda nel frattempo un lavoro analogo e lo invii a una rivista normale: se ciò accadesse, sarebbe subito depositato negli archivi elettronici e gli verrebbe riconosciuta la priorità della scoperta!

Dunque, aspettiamo con pazienza l'uscita per fine agosto. Vi sono dei ritardi, anche a causa dell'estate. 30 settembre, fine della suspense: *Nature* ci informa che non solo l'articolo

sarà pubblicato nel numero del 9 ottobre, ma che avrà l'onore della copertina, con una spettacolare rappresentazione a colori del dodecaedro di Poincaré visto dall'interno! (figura G)

Il fatidico giorno, un comunicato stampa, redatto senza che nessuno di noi sia stato consultato dall'astuto giornalista di *Nature*, fa sensazione: annuncia la scoperta di un modello di universo a forma di... pallone da calcio!

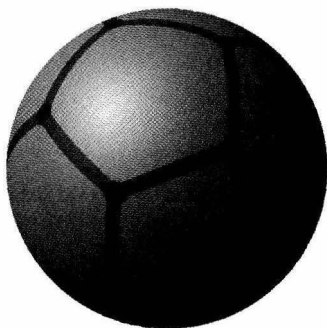



Figura D

Lo spazio di Poincaré può essere descritto come l'interno di una sorta di sfera formata da 12 pentagoni leggermente incurvati.

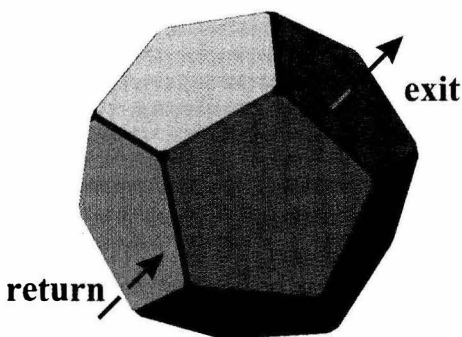



Figura E

La figura D potrebbe far pensare a un pallone da calcio. Ma vi è una notevole differenza: quando si arriva a una parete pentagonale, si ritorna nel pallone dalla faccia opposta, con un giro di 36°.

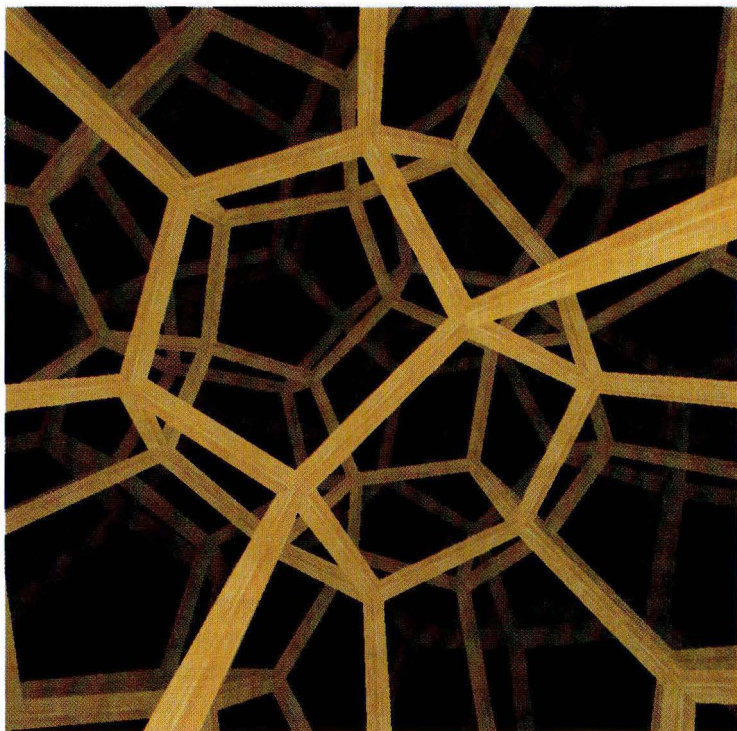



Figura F

Questo spazio è finito, ma non ha né bordi né limiti, sicché vi si può viaggiare indefinitamente. Di colpo si ha l'impressione di vivere in uno spazio 120 volte maggiore, pavimentato da dodecaedri che si moltiplicano come in una casa degli specchi. Il ritorno di raggi luminosi che attraversano le pareti produce miraggi ottici: uno stesso oggetto possiede più immagini.

Non avevamo previsto un simile paragone. Anche se è vero che, per spiegare ai lettori della rivista come l'ipersfera ordinaria potesse essere pavimentata da 120 dodecaedri impilati, avevamo dato l'immagine bidimensionale semplificata della superficie di una sfera, che poteva essere pavimentata da dodici pentagoni incurvati (figure D, E, F). E quest'immagine evoca appunto quella di un pallone da calcio.[4]

4. Negli Stati Uniti è chiamato "pallone da *soccer*", poiché nel *football* americano il pallone ha la forma allungata dei palloni da *rugby*...

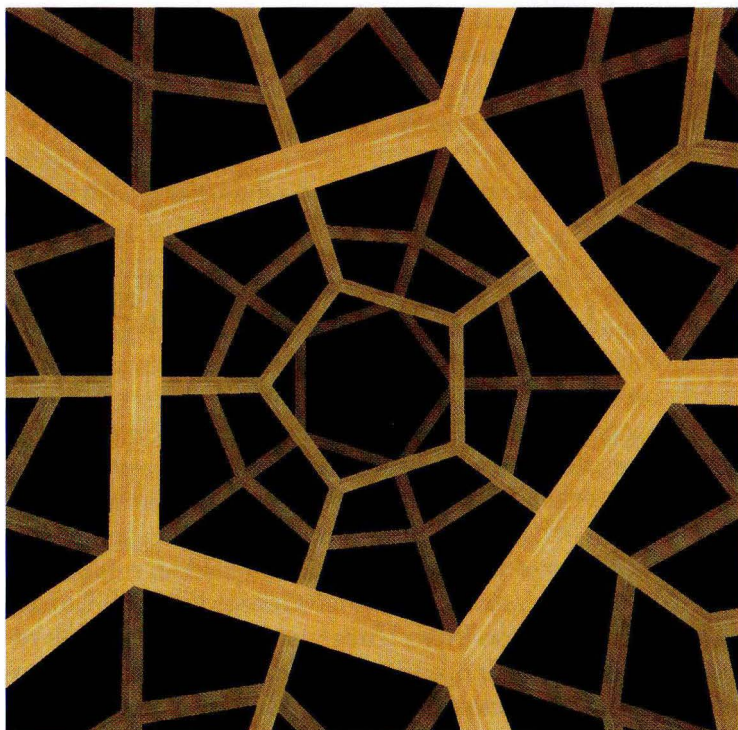



Figura G

Le mura dello spazio dodecaedrico non esistono per davvero. Sarebbe meglio parlare di "porte-finestre magiche": se una navicella spaziale – o più verosimilmente un raggio luminoso – cerca di uscire da una faccia, rientrerà immediatamente nel dodecaedro dalla faccia opposta, ma dopo aver compiuto una rotazione di 36°. In altri termini, in questo spazio finito un raggio di luce viaggerebbe indefinitamente, poiché ciascun raggio luminoso che esce da una faccia rientrerebbe dalla faccia opposta, avendo effettuato una rotazione di un decimo di angolo giro. Conseguenza: occorre che questo raggio entri ed esca per dieci volte per ritrovarsi simile a se stesso, e ciò spiega quest'immagine che mostra una parte del miraggio topologico creato quando si guarda perpendicolarmente a una faccia pentagonale del dodecaedro: dieci pentagoni impilati l'uno sopra l'altro con uno spostamento di 36°. Poiché il dodecaedro ha dodici facce, il miraggio globale dà l'illusione di 120 dodecaedri che pavimentano una ipersfera.

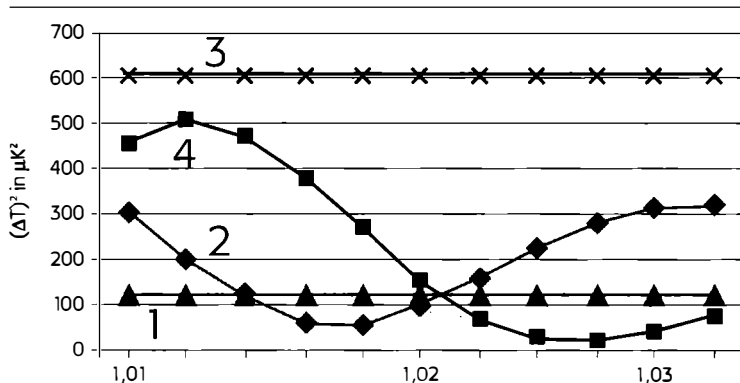



Figura H

Valori del parametro di massa-energia per il quale lo spazio dodecaedrico di Poincaré (curva 2 per il quadrupolo e curva 4 per l'ottupolo) si accorda con le osservazioni di WMAP (curva 1 per il quadrupolo e curva 3 per l'ottupolo). L'accordo è ottimale per un valore del parametro di massa-energia compreso tra 1,012 e 1,016.

Più seriamente, così il cosmologo George Ellis dell'Università di Città del Capo (Sud Africa), uno dei pionieri della topologia cosmica (vedi pp. 371-383), commenta il nostro lavoro in un breve articolo preliminare su *Nature*: "Sin dall'Antichità gli esseri umani hanno cercato di sapere se il nostro universo sia finito o infinito. Oggi, dopo oltre due millenni di speculazioni, delle osservazioni scientifiche potrebbero chiudere il dibattito. [...] Si tratterebbe di una delle maggiori scoperte sulla natura dell'universo".

La controversia

Che *Nature* dedichi la copertina a un articolo di cosmologia teorica non capita tutti i giorni, e la comunità scientifica, a maggioranza anglosassone, non sempre è tenera al proposito. In pieno scontro geopolitico circa l'intervento militare in Iraq, una parte della stampa USA concede qualche distratto e sbrigativo commento al nostro modello – senza, beninteso, comprenderne una parola. Così comincia l'articolo del *New York*

Times: “Pallone da *soccer* cosmico? La teoria ha già preso dei rudi calcioni. Questo modello rivoluzionario d’universo, a forma di pallone da *football*, arriva nei laboratori dei nostri astronomi già un po’ sgonfio”. Il resto dell’articolo è dello stesso tenore.[5]

Va detto che simili giudizi si basavano sulle dichiarazioni precipitose di due gruppi di ricerca statunitensi! Uno di questi ha affermato di aver già cercato invano coppie di cerchi opposti nel cielo e di aver pubblicato i propri risultati nella metà di agosto. In realtà, aveva cercato i cerchi soltanto nella topologia assai particolare dell’ipertoro, sicché quel lavoro non aveva alcun rapporto con il nostro. Tanto è vero che lo stesso gruppo di ricerca ha poi ammesso il proprio errore, riconoscendo di non aver familiarità con le topologie sferiche; ma era ormai troppo tardi per rettificare l’impressione negativa data dai media. Un altro gruppo di ricerca, molto più serio, diretto da Neil Cornish (lo stesso che aveva ideato il metodo dei cerchi correlati) ha a sua volta dichiarato ai giornalisti di aver cercato invano cerchi correlati nei dati di WMAP, e perciò di non aver pubblicato nulla! Le discussioni che sono seguite tra i nostri due gruppi di ricerca sono state vivaci, ma fruttuose. Alain Riazuelo ha costruito al computer mappe artificiali della radiazione fossile, basandosi su una topologia che aveva mantenuto segreta e che generava un gran numero di coppie di cerchi correlati; dopo qualche mese di calcoli, i nostri colleghi statunitensi ci hanno informato di essere riusciti a scoprire i nostri cerchi artificiali e a ritrovare la forma nascosta – il che rappresentava un indizio promettente della validità del loro metodo. Forti di tale risultato, hanno perfezionato il loro programma applicandolo ai dati reali e hanno ribadito il loro rifiuto del modello dodecaedrico, escludendo in particolare una taglia dell’universo più piccola dell’orizzonte cosmico.

5. L’articolo di *The Economist* è stato più sobrio: con il titolo di “Verità platoniche” ricordava come il dodecaedro fosse stato già impiegato da Platone per modellizzare geometricamente l’elemento costitutivo del cielo, la “quintessenza”.

Nel frattempo, però, un gruppo di ricerca polacco diretto da Boudewijn Roukema ha pubblicato all'inizio del 2004 un articolo in cui, analizzando gli *stessi* dati di WMAP, dichiara di aver trovato le sei coppie di cerchi correlati predetti dal modello dodecaedrico! Ciò mostra, peraltro, come l'analisi statistica dei dati osservativi sia delicata, giacché due analisi differenti degli stessi dati possono condurre a conclusioni diametralmente opposte!

Mentre sto scrivendo queste righe (giugno 2004), la controversia circa la forma dello spazio non è affatto conclusa. Siamo in attesa di una seconda messe di dati di WMAP, che integrano due anni di osservazioni con incertezze di misura verosimilmente ridotte. Quand'anche il modello dodecaedrico fosse alla fine confutato, non sarebbero per ciò stesso scartati tutti i modelli di spazio ben proporzionati. Ci si aspetta che i nuovi dati di WMAP confermino alcune anomalie a grande scala della radiazione fossile (il che spiegherebbe il sorprendente ritardo nella comunicazione di questa seconda messe di dati, originariamente prevista per febbraio 2004). Queste anomalie sono appunto una delle segnature possibili di un universo finito e multiconnesso. Inoltre, le nostre simulazioni numeriche mostrano che, quand'anche la taglia dello spazio multiconnesso fosse maggiore di quella dell'universo osservabile, potremmo comunque trovarne traccia nella radiazione fossile – nel qual caso non sussisterebbero più coppie di cerchi e ancor meno immagini fantasma di galassie. La topologia dell'universo potrebbe, dunque, fornire un'informazione su ciò che accade al di là dell'orizzonte cosmico!

Conseguenze per la fisica dell'universo primordiale

I modelli di universo finito e ben proporzionato, in particolare lo spazio dodecaedrico di Poincaré, rappresentano un vero e proprio vaso di Pandora per la fisica dell'universo primordiale. Il modello standard predice che, nelle prime fra-

zioni di secondo della sua esistenza, l'espansione sarebbe stata governata da una fase di crescita esponenziale, chiamata inflazione, dovuta a una rottura spontanea di simmetria durante il disaccoppiamento delle interazioni fondamentali. Prima ancora di parlare di topologia, occorre notare come la teoria dell'inflazione sollevi notevoli difficoltà. Nella sua versione più semplice, l'inflazione predice un universo molto più grande dell'universo osservabile. Il solo fatto che la curvatura sia positiva (come è il caso se $\Omega_0 > 1$) rappresenta già un problema per l'inflazione. Tuttavia, è possibile costruire modelli in cui la fase di inflazione sia più breve e consenta di avere una curvatura osservabile. Dunque, se lo spazio non è "piatto", l'esistenza di una topologia multiconnessa non è in flagrante contraddizione con l'inflazione. Quest'ultima dovrebbe potersi adattare, poiché la teoria possiede molti parametri liberi arbitrari. Nessun modello esplicito, però, è stato finora formulato.

Nell'odierna cosmologia relativistica si assume generalmente che l'omogeneità spaziale resti valida al di là dell'orizzonte cosmologico. Nel modello dell'inflazione caotica – una variante del modello dell'inflazione –, l'Universo diventerebbe assai disomogeneo su scale ben più grandi di ciò che possiamo osservare, e noi ci troveremmo in una bolla omogenea, in espansione tra innumerevoli altre bolle. A prima vista, il nostro modello è incompatibile con quello dell'inflazione caotica: fa intervenire una sola bolla d'universo in espansione, e inoltre sufficientemente piccola da poterla vedere nella sua interezza.

Già nel 1917 Einstein aveva sottolineato come gli universi spazialmente finiti presentassero il vantaggio di sopprimere il problema delle condizioni al contorno. Un piccolo universo, in cui possiamo vedere la maggior parte di ciò che esiste, è ancor più vantaggioso. Anzi, è l'unico tipo d'universo in cui potremmo predire il futuro astronomico – il ritorno della cometa di Halley, per esempio –, poiché è solo in questo tipo d'universo che potremmo disporre di tutti i dati per effettuare tali predizioni. Un simile argomento non è una prova di validità,

ma un'opzione filosofica interessante. Per il momento, i dati indicano che potremmo anche vivere in un universo finito e relativamente piccolo.

La parola *fine* (necessariamente provvisoria) tocca al poeta:

Molti sono i livelli dell'Universo
disposti secondo esatte proporzioni matematiche
Ogni chicco di grano il Sole rende maturo

Le sfere siderali sono pervase da fuoco purissimo
Numeri e figure sono i loro oggetti spirituali

Ricamiamo gli oggetti reali col filo
della cui tela sono fatti i sogni matematici
L'Universo pullula d'aritmetica
Disegnate un cerchio e avrete un pi greco
Avventuratevi in un nuovo sistema solare
e troverete le formule di Keplero
nascoste sotto la coltre di velluto nero
dello spazio-tempo.[6]

6. Vedi J.-P. Luminet, *Itinéraire céleste*, Le Cherche-Midi Éditeur, Paris 2004.

BIBLIOGRAFIA

ANDRILLAT, H., *L'Univers sous le regard du temps.* Masson, Paris 1993.
ARISTOTELE, *Del cielo.* Tr. it. Laterza, Roma-Bari 1983.
AUDOUZE, J., *Les Particules et l'univers.* PUF, Paris 2000.
AUDOUZE, J., G. ISRAEL (a cura di), *The Cambridge Atlas of Astronomy.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.
BARROW, J., *Teorie del tutto: la ricerca della spiegazione ultima.* Tr. it. Adelphi, Milano 1996.
BATON, J.-P., COHEN-TANNOUDIJ, G., *L'Horizon des particules.* Gallimard, Paris 1989.
BRUNO, G., *Opere italiane.* Testi critici di G. Aquilecchia, coordinamento generale di N. Ordine, 2 voll., UTET, Torino 2002.
CASSÉ, M., *Du vide et de la création.* Odile Jacob, Paris 1993.
CELNIKIER, L., *Histoire de l'astronomie occidentale.* Technique et Documentation, Paris 1992.
COHEN-TANNOUDJI, G., SPIRO, M., *La Matière-Espace-Temps.* Fayard, Paris 1986.
COMTE, A., *Corso di filosofia positiva.* Tr. it. con introduzione e commento di L. Geymonat, M. Quaranta, RADAR, Padova 1967.
CUSANO, N. *La dotta ignoranza.* Tr. it. con introduzione e note di G. Federici Vescovini, Fabbri, Milano 2000.
DAVIES, P. (a cura di), *La nuova fisica.* Tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1992.
DAVIES, P., *Superforza: verso una teoria unificata dell'universo.* Tr. it. Mondadori, Milano 1986.
DEMARET, J., *Univers.* Le Mail, Aix-en-Provence 1991.
DESCARTES, R., *Opere scientifiche.* Ed. it. a cura di E. Lojacono, 2 voll., UTET, Torino 1983.
EINSTEIN, A., *Opere scelte.* Ed. it. a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 1988.
FANG, L., LI, S., *La Naissance de l'Univers.* Inter-Éditions, Paris 1990.

GAMOW, G., *La creazione dell'Universo.* Tr. it. Mondadori, Milano 1956.

GRIBBIN, J., *In the Search of the Big Bang.* Penguin Books, London 1998.

HAKIM, R., *La Science et l'univers.* Syros, Paris 1992.

HARRISON, E., *Le Noir de la Nuit.* Le Seuil, Paris 1998.

HARRISON, E., *Cosmology.* Cambridge University Press, Cambridge 2000.

HAWKING, S., *Dal Big Bang ai buchi neri. Breve storia del tempo.* Tr. it. Rizzoli, Milano 1997.

HAWKING, S., PENROSE, R., *La natura dello spazio e del tempo.* Tr. it. Sansoni, Milano 1996.

HEIDMANN, J., *Introduction à la cosmologie.* PUF, Paris 1973.

HEIDMANN, J., *L'Odyssée cosmique.* Denoël, Paris 1986.

JAMMER, M., *Storia del concetto di spazio.* Tr. it. Feltrinelli, Milano 1966.

KANT, I., *Storia universale della natura e teoria del cielo.* Ed. it. a cura di G. Scarpelli, Theoria, Roma-Napoli 1987.

KEPLER, J., *Mysterium Cosmographicum.* Ed. a cura di M. Caspar, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1938.

KEPLER, J., *Harmonices mundi.* Ed. a cura di M. Caspar, C. H. Beck'-sche Verlagsbuchhandlung, München 1940.

KOESTLER, A., *I sonnambuli. Storia delle concezioni dell'universo.* Tr. it. Jaca Book, Milano 1991.

KOYRÉ, A., *Dal mondo chiuso all'universo infinito.* Tr. it. Feltrinelli, Milano 1970.

KOYRÉ, A., *Studi newtoniani.* Tr. it. Einaudi, Torino 1972.

KUHN, T., *La rivoluzione copernicana.* Tr. it. Einaudi, Torino 1972.

LACHIÈZE-REY, M., *Initiation à la cosmologie.* Masson, Paris 1992.

LACHIÈZE-REY, M., GUNZIG, E., *Le Rayonnement cosmologique.* Masson, Paris 1995.

LACHIÈZE-REY, M., LUMINET, J.-P., *Figures du ciel.* Le Seuil, Paris 1998.

LAPLACE, P.-S. de, *Traité de mécanique céleste.* Culture et civilisation, Bruxelles 1967.

LEMAÎTRE, G., *L'Hypothèse de l'atome primitif.* Griffon, Neuchâtel 1946.

LOCHAK, G., *La Géométrisation de la physique.* Flammarion, Paris 1994.

LOT, F., *L'Origine du Monde: le tour des théories de l'antiquité à nos jours.* Société Parisienne d'Edition, Paris 1950.

LUCREZIO, *De rerum natura.* Ed. it. a cura di I. Dionigi, Rizzoli, Milano 1994.

LUMINET, J.-P., *I buchi neri*. Tr. it. Nardi, Firenze 1992.
LUMINET, J.-P., *L'Invention du Big Bang*. Le Seuil, Paris 2004.
LUMINET, J.-P., LACHIÈZE-REY, M., *La Physique et l'Infini*. Flammarion, Paris 1994.
MAZURE, A., MATHEZ, G., MELLIER, Y., *Chronique de l'espace-temps*. Masson, Paris 1994.
MERLEAU-PONTY, J., *Cosmologies du XX^{e} siècle*. Gallimard, Paris 1965.
MICHEl, P.-H., *La Cosmologie de Giordano Bruno*. Hermann, Paris 1962.
MUNITZ, M.K. (a cura di), *Theories of Universe: From Babylonian Myth to Modern Science*. Free Press, New York 1957.
NEUGEBAUER, O. VON, *Le scienze esatte nell'antichità*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1974.
NEWTON, I. *Principi matematici della filosofia naturale*. Ed. it. a cura di A. Pala, UTET, Torino 1965.
NOTTALE, L. *L'Univers et la lumière*. Flammarion, Paris 1994.
PETIT, J.-P., *Le Topologicon*. Belin, Paris 1988.
PLATONE, *Tutti gli scritti*. Ed. it. a cura di G. Reale, Bompiani, Milano 2000.
POE, E.A., *Eureka. Saggio sull'universo materiale e spirituale*. Ed. it. a cura di G. Giorello e M. Skey, Theoria, Roma-Napoli 1990.
RAVIGNANT, P., KIELCE, A. (a cura di), *Cosmogonies: les grands mythes de la création du monde*. Le Mail, Paris 1988.
REEVES, H., *Dernières nouvelles du cosmos*. Le Seuil, Paris 1999.
REEVES, H., *La Première Seconde*. Le Seuil, Paris 1999.
SCHNEIDER, J. (a cura di), *Aux Confins de l'Univers*, Encyclopédie Diderot, Fayard, Paris 1985.
SILK, J., *The Big Bang*. Freeman, New York 1989.
SMOOT, G., DAVIDSON, K., *Nelle pieghe del tempo: la scoperta dell'universo neonato*. Ed. it. a cura di P. Plazzi e N. Mandolesi, Mondadori, Milano 1994.
THUAN, X.T., *Il caos e l'armonia*. Tr. it. Dedalo, Bari 2000.
THURSTON, W., *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton 1997.
VERDET J.-P. (a cura di), *Astronomie et astrophysique: textes essentiels de Platon à Einstein*. Larousse, Paris 1993.
WEEKS, J. *The Shape of Space*. Dekker, New York 1985.
WEINBERG, S. *I primi tre minuti: l'affascinante storia dell'Universo*. Tr. it. Mondadori, Milano 2000.

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

Tutte le altre illustrazioni sono state realizzate dall'autore.

INDICE DEI NOMI

INDICE ANALITICO*

* I numeri di pagina in corsivo si riferiscono alle didascalie delle illustrazioni.

1. E. Morin, A.B. Kern, *Terra-Patria*
2. I. Hacking, *Linguaggio e filosofia*
3. J. Derrida, *Spettri di Marx*
4. D. Bloor, *La dimensione sociale della conoscenza*
5. H.-G. Gadamer, *Dove si nasconde la salute*
6. L. Krauss, *Paura della fisica*
7. L. Althusser, *Sulla psicoanalisi*
8. T. Wilkie, *La sfida della conoscenza*
9. H. Wulff, S. Andur Pedersen, R. Rosenberg, *Filosofia della medicina*
10. G. Bachelard, *La formazione dello spirito scientifico*
11. J.-P. Changeux, *Ragione e piacere*
12. A. Musgrave, *Senso comune, scienza e scetticismo*
13. W. Vandereycken, R. van Deth, *Dalle sante ascetiche alle ragazze anoressiche*
14. F. Prattico, *La tribù di Caino*
15. I. Lakatos, P.K. Feyerabend, *Sull'orlo della scienza*
16. G. Reale, *Saggezza antica*
17. E. Tiezzi, *Fermare il tempo*
18. J. Baudrillard, *Il delitto perfetto*
19. B.E. Babich, *Nietzsche e la scienza*
20. E.P. Thompson, *Apocalisse e rivoluzione*
21. A. Cromer, *L'eresia della scienza*
22. W. Weischedel, *La filosofia dalla scala di servizio*
23. R. Gilmore, *Alice nel paese dei quanti*
24. M. Merleau-Ponty, *La natura*
25. B. Forte, *Trinità per atei*
26. P. Lombardi, *Il filosofo e la strega*
27. A. Petroni, R. Viale (a cura di), *Individuale e collettivo*
28. P. Lévy, *Il virtuale*

29. J. Derrida, B. Stiegler, *Ecografie della televisione*
30. R. DeSalle, D. Lindley, *Come costruire un dinosauro*
31. E.P. Fischer, *Aristotele, Einstein e gli altri*
32. R. Scruton, *Guida filosofica per tipi intelligenti*
33. C. Bruce, *Sherlock Holmes e i misteri della scienza*
34. D. Del Corno, *I narcisi di Colono*
35. R. Penrose, *Il grande, il piccolo e la mente umana*
36. G. Kolata, *Cloni*
37. R. Caillois, *L'occhio di Medusa*
38. J.-P. Vernant, *Tra mito e politica*
39. S. Ortoli, N. Witkowski, *La vasca di Archimede*
40. A. Emo, *Supremazia e maledizione*
41. G. Cosmacini, *Ciarlataneria e medicina*
42. J.-M. Barrault, *La terra è rotonda*
43. M. Rees, *Prima dell'inizio*
44. J.L. Casti, *I cinque di Cambridge*
45. J.R. Searle, *Il mistero della coscienza*
46. R.L. Gregory, *Occhio e cervello*
47. B. Forte, *Teologia in dialogo*
48. C. Allègre, *Dio e l'impresa scientifica*
49. G. Reale, *Corpo, anima e salute*
50. J.-P. Changeux, P. Ricoeur, *La natura e la regola*
51. E. Husserl, *L'idea di Europa*
52. C.M. Martini, *Orizzonti e limiti della scienza*
53. M. Hack, *Sette variazioni sul cielo*
54. H. Hellman, *Le dispute della scienza*
55. J.-F. Bouvet (a cura di), *Gli spinaci sono ricchi di ferro*
56. R. Gilmore, *Il quanto di Natale*
57. C.A. Pickover, *Tempo*
58. C. Darwin, *Lettere 1825-1859*
59. P. Virilio, *La bomba informatica*
60. J. Polkinghorne, *Credere in Dio nell'età della scienza*
61. T.S. Kuhn, *Dogma contro critica*
62. M. Zambrano, *Delirio e destino*

63. C. Formenti, *Incantati dalla rete*
64. J.-P. Vernant, *L'individuo, la morte, l'amore*
65. J.R. Searle, *Mente, linguaggio, società*
66. L. Boltanski, *Lo spettacolo del dolore*
67. C. Sini, *Idoli della conoscenza*
68. G. Cosmacini, *Il mestiere di medico*
69. B. Latour, *Politiche della natura*
70. R.N. Proctor, *La guerra di Hitler al cancro*
71. G.B. Dyson, *L'evoluzione delle macchine*
72. P. Odifreddi, *Il computer di Dio*
73. E. Boncinelli, U. Bottazzini, *La serva padrona*
74. J.D. Barrow, *Dall'io al cosmo*
75. L. Krauss, *Il mistero della massa mancante nell'Universo*
76. P. Wallace, *La psicologia di Internet*
77. R. Levi-Montalcini, *Cantico di una vita*
78. G. Reale, D. Antiseri, *Quale ragione?*
79. H. Gatti, *Giordano Bruno e la scienza del Rinascimento*
80. H. Margaron, *Le stagioni degli dei*
81. A. Santosuosso, *Corpo e libertà*
82. A. Frullini, *Mozart e il divieto di successione*
83. P.-M. Lledo, *Malati di cibo*
84. J. Horgan, *La mente inviolata*
85. K. Jaspers, *Genio e follia*
86. C.M. Martini, *Figli di Crono*
87. G. Bonadonna, *La cura possibile*
88. J.L. Casti, W. DePauli, *Gödel*
89. J.-F. Bouvet, *La strategia del camaleonte*
90. C. Bruce, *Sherlock Holmes e le trappole della logica*
91. D. Crawford, *Il nemico invisibile*
92. A. Djebbar, *Storia della scienza araba*
93. N. Eldredge, *Le trame dell'evoluzione*
94. P.K. Feyerabend, *Conquista dell'abbondanza*
95. S.J. Dick, *Vita nel cosmo*
96. D.P. Barash, J.E. Lipton, *Il mito della monogamia*

97. Z. Bauman, K. Tester, *Società, etica, politica*
98. H. Hellman, *Le dispute della medicina*
99. J. LeDoux, *Il Sé sinaptico*
100. D.J. Boorstin, *L'avventura della ricerca*
101. P. Odifreddi, *La repubblica dei numeri*
102. J.R. Searle, *La razionalità dell'azione*
103. A. Negri, *Guide*
104. D. Davidson, *Soggettivo, intersoggettivo, oggettivo*
105. G. Boniolo, *Il limite e il ribelle*
106. H. Rheingold, *Smart mobs*
107. B. McGuire, *Guida alla fine del mondo*
108. G. Reale, *Radici culturali e spirituali dell'Europa*
109. G. Gigerenzer, *Quando i numeri ingannano*
110. J. Derrida, *Stati canaglia*
111. S. Budiansky, *Il carattere del gatto*
112. C. de Duve, *Come evolve la vita*
113. N. Witkowski, *Storia sentimentale della scienza*
114. K. Sterelny, *La sopravvivenza del più adatto*
115. J. Repcheck, *L'uomo che scoprì il tempo*
116. D.C. Dennett, *L'evoluzione della libertà*
118. W.V. Quine, *Da un punto di vista logico*
119. A.D. Aczel, *Entanglement*